UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PAVIA

Laurea in Ingegneria Elettronica e Informatica

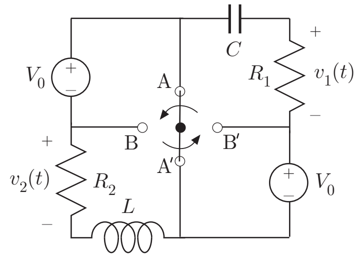
CAMPI ELETTROMAGNETICI E CIRCUITI I

7.09.2012

Problema 1

L'interruttore indicato nel circuito in figura commuta nell'istante $t = 0$ dalla posizione AA′ alla posizione BB′. Determinare le espressioni delle tensioni $v_1(t)$ e $v_2(t)$ per ogni istante di tempo e tracciarne il grafico dell'andamento temporale.

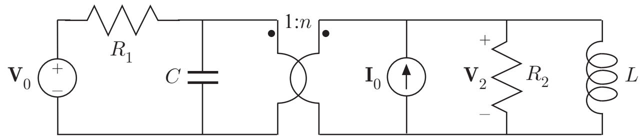
Dati: $V_0 = 10$ V, $R_1 = R_2 = 100\ \Omega$, $C = 10$ nF, $L = 100\ \mu$H.



Problema 2

Con riferimento al circuito in figura, nel quale i due generatori operano in regime sinusoidale alla pulsazione ω, calcolare la tensione $\mathbf{V}_2$ e la potenza P_2 assorbita dalla resistenza R_2.

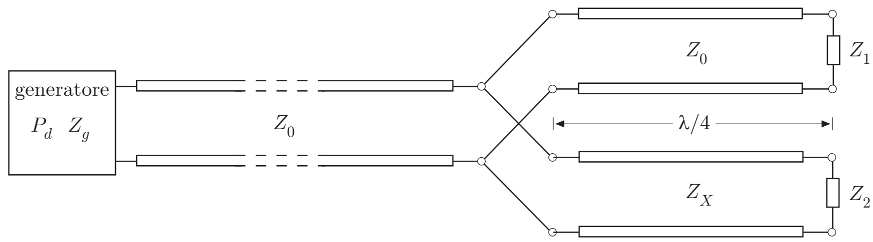
Dati: $\omega = 10^8$ rad/s, $\mathbf{V}_0 = 1$ V, $\mathbf{I}_0 = j\,20$ mA, $n = 10$, $R_1 = 10\ \Omega$, $R_2 = 1$ kΩ, $C = 1$ nF, $L = 10\ \mu$H.



Problema 3

Con riferimento al circuito in figura, nell'ipotesi che tutte le linee di trasmissione siano in aria e senza perdite, determinare il valore dell'impedenza caratteristica Z_X affinché la potenza attiva assorbita dai due carichi sia identica. In tale condizione, determinare il modulo del fasore di corrente su entrambi i carichi.

Dati: $P_d = 100$ W, $f = 5$ GHz, $Z_g = Z_0 = 50\ \Omega$, $Z_1 = (1 + j)Z_0$, $Z_2 = 2(1 - j)Z_0$.



UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PAVIA

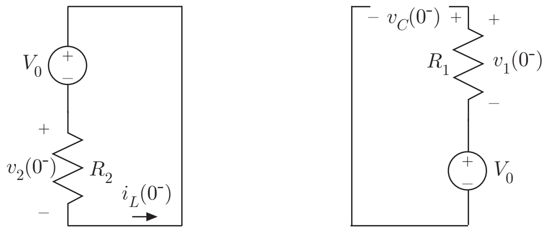
Laurea in Ingegneria Elettronica e Informatica

CAMPI ELETTROMAGNETICI E CIRCUITI I

7.09.2012

Soluzione del Problema 1

Prima dell'istante $t = 0$ il circuito può essere diviso in due sottocircuiti che operano autonomamente in regime stazionario, in cui il condensatore si comporta come un circuito aperto e l'induttore come un cortocircuito, come mostrato nella seguente figura:



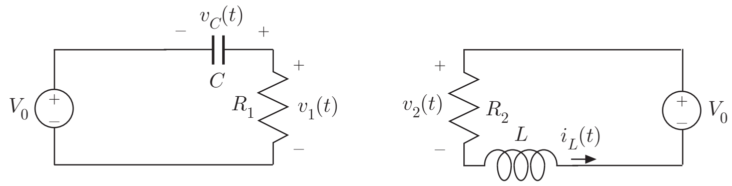
Considerando il circuito di destra, poiché sulla resistenza R_1 non scorre corrente, si ha

$$v_1(0^-) = 0 \qquad\qquad v_C(0^-) = V_0 = 10 \text{ V}$$

Applicando la KVL e la legge di Ohm al circuito di sinistra si ottiene

$$v_2(0^-) = -V_0 = -10 \text{ V} \qquad\qquad i_L(0^-) = v_2(0^-)/R_2 = -10/100 = -0.1 \text{ A}$$

Quando l'interruttore commuta nella posizione BB′ il circuito può ancora essere diviso in due sottocircuiti che funzionano separatamente:



Per $t \to \infty$ i sottocircuiti operano in condizioni stazionarie e si ottiene facilmente

$$v_1(\infty) = 0 \qquad\qquad v_2(\infty) = V_0 = 10 \text{ V}$$

Nell'istante $t = 0^+$ si ha:

$$v_1(0^+) = V_0 + v_C(0^+) = V_0 + v_C(0^-) = 2V_0 = 20 \text{ V}$$

e

$$v_2(0^+) = R_2 i_L(0^+) = R_2 i_L(0^-) = v_2(0^-) = -V_0 = -10 \text{ V}$$

Per il calcolo della costante di tempo si ottiene facilmente

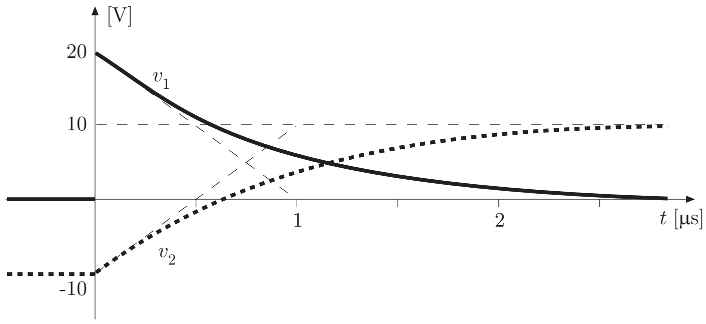
$$\tau_C = R_1 C = 100 \cdot 10 \cdot 10^{-9} = 1 \ \mu\text{s} \qquad\qquad \tau_L = \frac{L}{R_2} = \frac{100 \cdot 10^{-6}}{100} = 1 \ \mu\text{s}$$

Le espressioni delle due tensioni risultano quindi

$$v_1(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 20 \ \mathrm{e}^{-t_{[\mu s]}} \ \mathrm{V} & t > 0 \end{cases}$$

$$v_2(t) = \begin{cases} -10 \ \mathrm{V} & t < 0 \\ 10 - 20 \ \mathrm{e}^{-t_{[\mu s]}} \ \mathrm{V} & t > 0 \end{cases}$$

Il grafico dell'andamento delle tensioni è mostrato nella seguente figura:



UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PAVIA

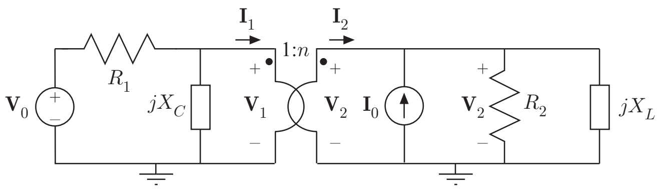
Laurea in Ingegneria Elettronica e Informatica

CAMPI ELETTROMAGNETICI E CIRCUITI I

7.09.2012

Soluzione del Problema 2

Introducendo le impedenze associate al condensatore e all'induttore, il circuito da considerare è il seguente:



dove

$$X_C = -\frac{1}{\omega C} = -\frac{1}{10^8 \cdot 10^{-9}} = -10\ \Omega$$

$$X_L = \omega L = 10^8 \cdot 10^{-5} = 1000\ \Omega$$

Applicando il metodo di analisi nodale alle due parti del circuito si ottengono le seguenti equazioni:

$$\frac{\mathbf{V}_1 - \mathbf{V}_0}{R_1} + \frac{\mathbf{V}_1}{jX_C} + \mathbf{I}_1 = 0 \qquad\qquad -\mathbf{I}_2 - \mathbf{I}_0 + \frac{\mathbf{V}_2}{R_2} + \frac{\mathbf{V}_2}{jX_L} = 0$$

Sostituendole nella prima equazione le relazioni fra tensioni e correnti sulle porte del trasformatore ($\mathbf{V}_1 = \mathbf{V}_2/n$, $\mathbf{I}_1 = n\mathbf{I}_2$), ricavando $\mathbf{I}_2$ e sostituendola nella seconda equazione si ottiene

$$\frac{\mathbf{V}_2}{n^2 R_1} - \frac{\mathbf{V}_0}{nR_1} + \frac{\mathbf{V}_2}{jn^2 X_C} - \mathbf{I}_0 + \frac{\mathbf{V}_2}{R_2} + \frac{\mathbf{V}_2}{jX_L} = 0$$

da cui si ricava

$$\mathbf{V}_2 = \frac{\dfrac{\mathbf{V}_0}{nR_1} + \mathbf{I}_0}{\dfrac{1}{n^2 R_1} + \dfrac{1}{jn^2 X_C} + \dfrac{1}{R_2} + \dfrac{1}{jX_L}}$$

Poiché

$$n^2 R_1 = 100 \cdot 10 = R_2 \qquad\qquad n^2 X_C = -\frac{n^2}{\omega C} = -\frac{100}{10^8 \cdot 10^{-9}} = -1000\ \Omega = -X_L$$

si ottiene

$$\mathbf{V}_2 = \frac{R_2}{2}\left(\frac{\mathbf{V}_0}{nR_1} + \mathbf{I}_0\right) = \frac{1000}{2} \cdot \left(\frac{1}{10 \cdot 10} + j0.02\right) = 5 + j10\ \mathrm{V}$$

La potenza assorbita dalla resistenza R_2 risulta:

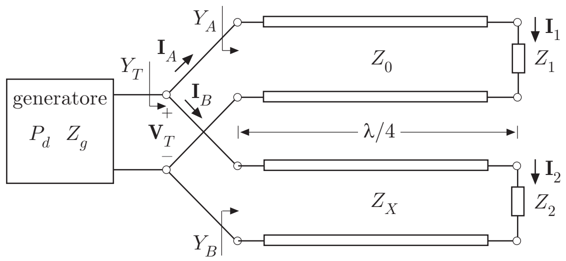
$$P_2 = \frac{|\mathbf{V}_2|^2}{2R_2} = \frac{25 + 100}{2 \cdot 1000} = 62.5\ \mathrm{mW}$$

CAMPI ELETTROMAGNETICI E CIRCUITI I

7.09.2012

Soluzione del Problema 3

La linea collegata al generatore è senza perdite e ha impedenza caratteristica coincidente con quella interna del generatore. Essa risulta pertanto ininfluente per il calcolo delle potenze erogate ai carichi e il circuito può essere semplificato come mostrato nella seguente figura



Con riferimento ai simboli introdotti nella figura, tenendo conto delle proprietà delle line in quarto d'onda, si ha:

$$Y_A = \frac{1}{Z_A} = \frac{1}{Z_0^2/Z_1} = \frac{Z_1}{Z_0^2} = \frac{1+j}{Z_0}$$

$$Y_B = \frac{1}{Z_B} = \frac{1}{Z_X^2/Z_2} = \frac{Z_2}{Z_X^2} = 2\left(\frac{Z_0}{Z_X}\right)^2 \frac{1-j}{Z_0}$$

Essendo le linee senza perdite, le potenze attive assorbite da Z_1 e Z_2 coincidono rispettivamente con le potenze assorbite da Y_A e Y_B. Si ha quindi

$$\begin{aligned} P_1 = P_A &= \mathrm{Re}\frac{\mathbf{V}_T\mathbf{I}_A^*}{2} = \mathrm{Re}\frac{\mathbf{V}_T\mathbf{V}_T^* Y_A^*}{2} = \frac{|\mathbf{V}_T|^2}{2Z_0} \\ P_2 = P_B &= \mathrm{Re}\frac{\mathbf{V}_T\mathbf{I}_B^*}{2} = \mathrm{Re}\frac{\mathbf{V}_T\mathbf{V}_T^* Y_B^*}{2} = \frac{|\mathbf{V}_T|^2}{2Z_0}\, 2\left(\frac{Z_0}{Z_X}\right)^2 \end{aligned}$$

affinché si abbia $P_1 = P_2$ deve valere

$$2\left(\frac{Z_0}{Z_X}\right)^2 = 1 \qquad \Rightarrow \qquad Z_X = \sqrt{2}\, Z_0 = 70.7\ \Omega$$

L'ammettenza complessiva vista dal generatore risulta quindi

$$Y_T = Y_A + Y_B = \frac{1+j}{Z_0} + \frac{1-j}{Z_0} = \frac{2}{Z_0}$$

e quindi il generatore vede come carico un'impedenza reale di valore

$$Z_I = 1/Y_T = Z_0/2$$

La potenza erogata dal generatore risulta quindi

$$P_I = \frac{4R_g R_I}{|Z_g + Z_I|^2}\, P_d = \frac{4Z_0 Z_0/2}{|Z_0 + Z_0/2|^2}\, P_d = \frac{8}{9}\, P_d$$

Le potenze assorbite dai due carichi risultano quindi

$$P_1 = P_2 = \frac{4}{9}\, P_d = 44.4 \text{ W}$$

Poiché

$$P_1 = \frac{|\mathbf{I}_1|^2}{2}\, \mathrm{Re} Z_1 = \frac{|\mathbf{I}_1|^2}{2}\, Z_0 \qquad\qquad P_2 = \frac{|\mathbf{I}_2|^2}{2}\, \mathrm{Re} Z_2 = \frac{|\mathbf{I}_2|^2}{2}\, 2Z_0$$

si ottiene

$$|\mathbf{I}_1| = \sqrt{\frac{2P_1}{Z_0}} = 0.943 \text{ A} \qquad\qquad |\mathbf{I}_2| = \sqrt{\frac{P_2}{Z_0}} = 1.33 \text{ A}$$

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PAVIA

Laurea in Ingegneria Elettronica e Informatica

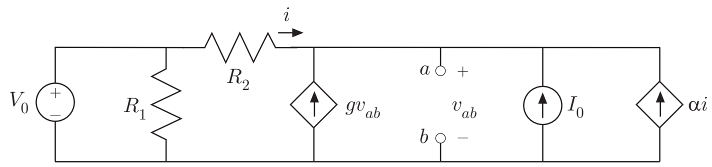
CAMPI ELETTROMAGNETICI E CIRCUITI I

19.09.2012

Problema 1

Con riferimento al circuito in figura, determinare il generatore equivalente di Thevenin ai morsetti ab. Determinare quindi la potenza disponibile del generatore. Calcolare infine la potenza erogata dal generatore se un carico di valore R_L viene collegato ai morsetti ab.

Dati: $V_0 = 50$ V, $I_0 = 2$ A, $R_1 = 50\ \Omega$, $R_2 = 100\ \Omega$, $g = 20$ mS, $\alpha = 3$, $R_L = 200\ \Omega$.

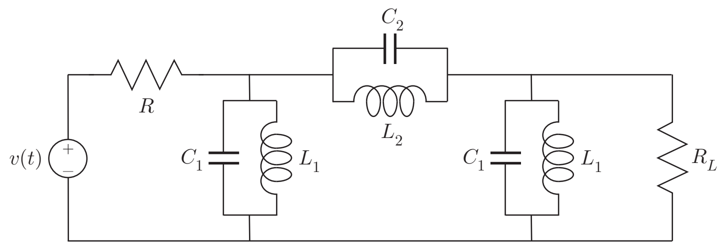


Problema 2

La pulsazione di lavoro del generatore sinusoidale nel circuito in figura è (idealmente) variabile da zero fino ad infinito. Determinare la potenza assorbita dalla resistenza R_L nei seguenti casi:

a) $\omega = 0$
b) $\omega = 10^9$ rad/s
c) $\omega = 4 \cdot 10^9$ rad/s
d) $\omega \to \infty$

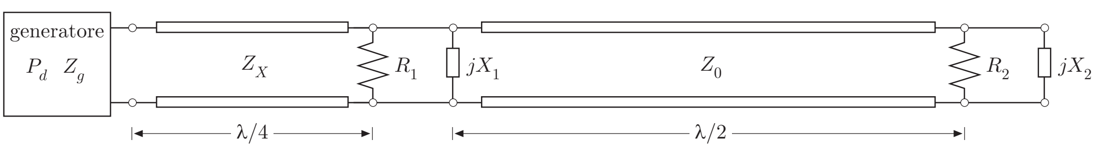
Dati: $v(t) = V_0 \cos \omega t$, $V_0 = 1$ V, $R = 100\ \Omega$, $R_L = 200\ \Omega$, $C_1 = 2.5$ pF, $L_1 = 25$ nH. $C_2 = 10$ pF, $L_2 = 100$ nH.



Problema 3

Con riferimento al circuito in figura, nell'ipotesi che tutte le linee di trasmissione siano senza perdite, determinare il valore della reattanza X_1 e dell'impedenza caratteristica Z_X affinché il generatore risulti adattato. In tale condizione, determinare le potenze assorbite dalle resistenze R_1 ed R_2.

Dati: $P_d = 100$ mW, $f = 2.5$ GHz, $Z_g = Z_0 = 50\ \Omega$, $R_1 = 25\ \Omega$, $R_2 = 100\ \Omega$, $X_2 = -20\ \Omega$.



UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PAVIA

Laurea in Ingegneria Elettronica e Informatica

CAMPI ELETTROMAGNETICI E CIRCUITI I

19.09.2012

Soluzione del Problema 1

Applicando la KVL alla maglia che include il generatore di tensione, la resistenza R_2 e la tensione v_{ab} si ottiene:

$$v_{Th} = v_{ab} = V_0 - R_2 i$$

Inoltre, applicando la KCL al nodo che collega i generatori di corrente e la resistenza R_2 si ha

$$i = -g v_{Th} - I_0 - \alpha i \qquad \Rightarrow \qquad i = -\frac{g v_{Th} + I_0}{1+\alpha}$$

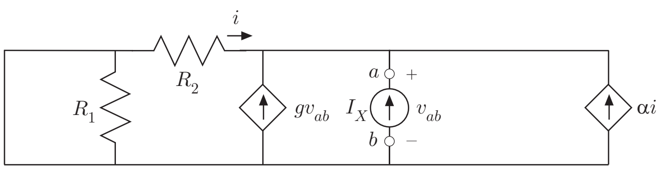
Sostituendo nella prima equazione di ottiene

$$v_{Th} = V_0 + \frac{gR_2}{1+\alpha}\, v_{Th} + \frac{R_2}{1+\alpha}\, I_0$$

da cui

$$v_{Th} = \frac{V_0 + \dfrac{R_2}{1+\alpha}\, I_0}{1 - \dfrac{gR_2}{1+\alpha}} = \frac{50 + \dfrac{100}{1+3} \cdot 2}{1 - \dfrac{0.02 \cdot 100}{1+3}} = \frac{50 + 25 \cdot 2}{1 - \dfrac{1}{2}} = 200 \text{ V}$$

Per il calcolo della resistenza equivalente si spengono i generatori indipendenti e, data la presenza di generatori dipendenti, si eccita il circuito ai morsetti ab con un generatore esterno (ad esempio di corrente). Il circuito da analizzare risulta quindi quello mostrato nella seguente figura:



Poiché nella resistenza R_1 non scorre corrente a causa del cortocircuito posto in parallelo ad essa, si vede immediatamente che

$$v_{ab} = -R_2 i$$

D'altra parte, applicando la KCL al nodo che collega i generatori di corrente e la resistenza R_2 si ha

$$i = -g v_{ab} - I_X - \alpha i \qquad \Rightarrow \qquad i = -\frac{g v_{ab} + I_X}{1+\alpha}$$

Sostituendo nella prima equazione di ottiene

$$v_{ab} = \frac{gR_2}{1+\alpha}\, v_{ab} + \frac{R_2}{1+\alpha}\, I_X$$

da cui

$$R_{Th} = \frac{v_{ab}}{I_X} = \frac{\dfrac{R_2}{1+\alpha}}{1 - \dfrac{gR_2}{1+\alpha}} = \frac{25}{1 - \dfrac{1}{2}} = 50\ \Omega$$

La potenza disponibile del generatore risulta quindi:

$$P_d = \frac{V_{Th}^2}{4R_{Th}} = \frac{200^2}{4 \cdot 50} = 200 \text{ W}$$

Se al generatore equivalente di Thevenin si collega la resistenza R_L, la tensione su di essa sarà:

$$V_L = \frac{R_L}{R_L + R_{Th}} \, V_{Th} = \frac{200}{200 + 50} \, V_{Th} = \frac{4}{5} \, 200 = 160 \text{ V}$$

e la potenza assorbita da R_L sarà quindi:

$$P_L = \frac{V_L^2}{R_L} = \frac{160^2}{200} = 128 \text{ W}$$

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PAVIA

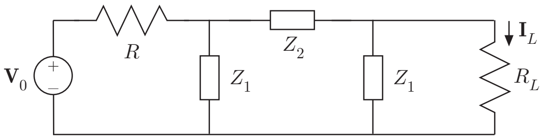
Laurea in Ingegneria Elettronica e Informatica

CAMPI ELETTROMAGNETICI E CIRCUITI I

19.09.2012

Soluzione del Problema 2

Passando al dominio dei fasori il circuito diventa



dove

$$\mathbf{V}_0 = V_0 = 1 \text{ V}$$

e le impedenze Z_1 e Z_2 sono date entrambe dalla formula seguente (ponendo $n = 1$ o $n = 2$):

$$Z_n = \frac{j\omega L_n \cdot \dfrac{1}{j\omega C_n}}{j\omega L_n + \dfrac{1}{j\omega C_n}} = \frac{j\omega L_n}{1 - \omega^2 L_n C_n} = j\sqrt{\frac{L_n}{C_n}}\, \frac{\omega\sqrt{L_n C_n}}{1 - \omega^2 L_n C_n} = jX_n\, \frac{\omega/\omega_n}{1 - (\omega/\omega_n)^2}$$

avendo introdotto le quantità

$$\omega_1 = \frac{1}{\sqrt{L_1 C_1}} = \frac{1}{\sqrt{25 \cdot 10^{-9} \cdot 2.5 \cdot 10^{-12}}} = 4 \cdot 10^9 \text{ rad/s}$$

$$\omega_2 = \frac{1}{\sqrt{L_2 C_2}} = \frac{1}{\sqrt{100 \cdot 10^{-9} \cdot 10 \cdot 10^{-12}}} = 10^9 \text{ rad/s}$$

$$X_1 = \sqrt{\frac{L_1}{C_1}} = \sqrt{\frac{25 \cdot 10^{-9}}{2.5 \cdot 10^{-12}}} = 100\ \Omega$$

$$X_2 = \sqrt{\frac{L_2}{C_2}} = \sqrt{\frac{100 \cdot 10^{-9}}{10 \cdot 10^{-12}}} = 100\ \Omega$$

Caso a: $\omega = 0$

Poiché $Z_1 = Z_2 = 0$, tutti i rami si comportano come dei cortocircuiti. Di conseguenza la resistenza R_L risulta cortocircuitata e in essa non fluisce corrente. Si ha quindi:

$$P_L = 0$$

Caso b: $\omega = 10^9$ rad/s

Poiché $\omega = \omega_2$, si ha $Z_2 = \infty$ e quindi il ramo superiore si comporta come un circuito aperto, disconnettendo il carico R_L dal generatore. Si ha pertanto

$$P_L = 0$$

Caso c: $\omega = 4 \cdot 10^9$ rad/s

Poiché $\omega = \omega_1$, si ha $Z_1 = \infty$ e quindi le due impedenze in verticale sono ininfluenti. Inoltre si ha

$$Z_2 = jX_2 \, \frac{\omega/\omega_2}{1-(\omega/\omega_2)^2} = j100 \, \frac{4}{1-4^2} \approx -j\,26.7\ \Omega$$

La potenza assorbita è quindi data da:

$$P_L = \frac{R_L|\mathbf{I}_L|^2}{2} = \frac{R_L|\mathbf{V}_0|^2}{2|R+R_L+Z_2|^2} = \frac{200 \cdot 1}{2|100+200-j\,26.7|^2} \approx 1.1\ \text{mW}$$

Caso d: $\omega \to \infty$

Facendo il limite si ottiene che $Z_1 = Z_2 = 0$. Pertanto il circuito si comporta come nel caso a e si ha

$$P_L = 0$$

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PAVIA

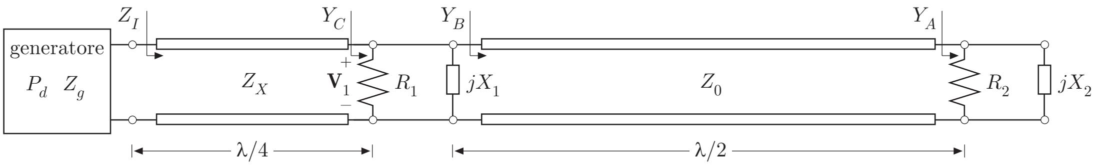
Laurea in Ingegneria Elettronica e Informatica

CAMPI ELETTROMAGNETICI E CIRCUITI I

19.09.2012

Soluzione del Problema 3

Con riferimento ai simboli introdotti nella seguente figura



tenendo conto delle proprietà delle line in mezz'd'onda, si ha:

$$Y_B = Y_A = \frac{1}{R_2} + \frac{1}{jX_2}$$

e quindi si ottiene

$$Y_C = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{jX_1} + Y_B = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} - j\left(\frac{1}{X_1} + \frac{1}{X_2}\right)$$

L'impedenza d'ingresso della linea in quarto d'onda senza perdite è data da

$$Z_I = \frac{Z_X^2}{Z_C} = Y_C Z_X^2 = \frac{1}{Z_X^2/Z_C}$$

Imponendo la condizione di adattamento ($Z_I = Z_0^*$) si ottiene il sistema

$$\begin{cases} Z_X^2\left(\dfrac{1}{R_1} + \dfrac{1}{R_2}\right) = Z_0 \\[2ex] Z_X^2\left(\dfrac{1}{X_1} + \dfrac{1}{X_2}\right) = 0 \end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad \begin{cases} Z_X = \sqrt{\dfrac{Z_0}{1/R_1 + 1/R_2}} = \sqrt{\dfrac{50}{1/25 + 1/100}} \approx 31.6\ \Omega \\[2ex] X_1 = -X_2 = 20\ \Omega \end{cases}$$

La potenza assorbita dalla resistenza R_2 coincide con la potenza attiva assorbita dall'ammettenza Y_B. Si ha quindi

$$P_1 = \frac{|\mathbf{V}_1|^2}{2R_1} \qquad\qquad P_2 = \frac{|\mathbf{V}_1|^2}{2}\,\mathrm{Re}\,Y_B^* = \frac{|\mathbf{V}_1|^2}{2R_2}$$

da cui

$$\frac{P_1}{P_2} = \frac{R_2}{R_1} = \frac{100}{25} = 4$$

Poiché tutte le linee sono senza perdite, tutta la potenza erogata (P_d) deve essere assorbita dalle due resistenze, cioé

$$P_d = P_1 + P_2 = 4P_2 + P_2 = 5P_2$$

e quindi

$$P_1 = \frac{4}{5}\,P_d = 80\ \text{mW} \qquad\qquad P_2 = \frac{1}{5}\,P_d = 20\ \text{mW}$$

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PAVIA

Laurea in Ingegneria Elettronica e Informatica

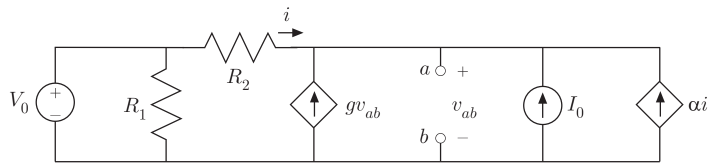
CAMPI ELETTROMAGNETICI E CIRCUITI I

19.09.2012

Problema 1

Con riferimento al circuito in figura, determinare il generatore equivalente di Thevenin ai morsetti *ab*. Determinare quindi la potenza disponibile del generatore. Calcolare infine la potenza erogata dal generatore se un carico di valore R_L viene collegato ai morsetti *ab*.

Dati: $V_0 = 50$ V, $I_0 = 2$ A, $R_1 = 50\ \Omega$, $R_2 = 100\ \Omega$, $g = 20$ mS, $\alpha = 3$, $R_L = 200\ \Omega$.

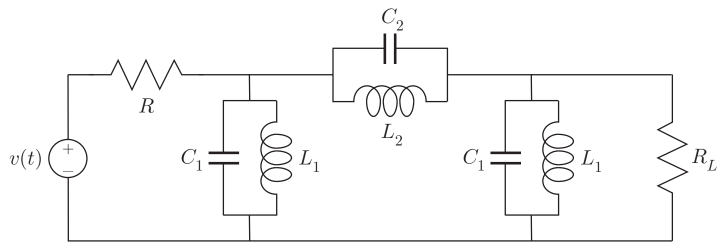


Problema 2

La pulsazione di lavoro del generatore sinusoidale nel circuito in figura è (idealmente) variabile da zero fino ad infinito. Determinare la potenza assorbita dalla resistenza R_L nei seguenti casi:

a) $\omega = 0$
b) $\omega = 10^9$ rad/s
c) $\omega = 4 \cdot 10^9$ rad/s
d) $\omega \to \infty$

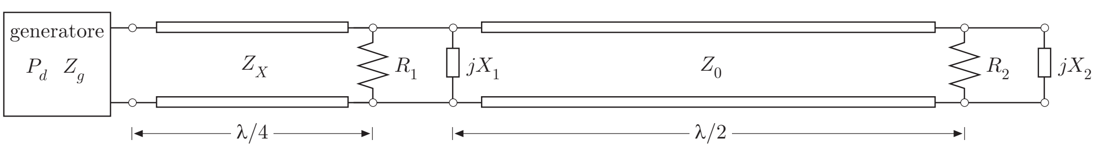
Dati: $v(t) = V_0 \cos \omega t$, $V_0 = 1$ V, $R = 100\ \Omega$, $R_L = 200\ \Omega$, $C_1 = 2.5$ pF, $L_1 = 25$ nH. $C_2 = 10$ pF, $L_2 = 100$ nH.



Problema 3

Con riferimento al circuito in figura, nell'ipotesi che tutte le linee di trasmissione siano senza perdite, determinare il valore della reattanza X_1 e dell'impedenza caratteristica Z_X affinché il generatore risulti adattato. In tale condizione, determinare le potenze assorbite dalle resistenze R_1 ed R_2.

Dati: $P_d = 100$ mW, $f = 2.5$ GHz, $Z_g = Z_0 = 50\ \Omega$, $R_1 = 25\ \Omega$, $R_2 = 100\ \Omega$, $X_2 = -20\ \Omega$.



UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PAVIA

Laurea in Ingegneria Elettronica e Informatica

CAMPI ELETTROMAGNETICI E CIRCUITI I

19.09.2012

Soluzione del Problema 1

Applicando la KVL alla maglia che include il generatore di tensione, la resistenza R_2 e la tensione v_{ab} si ottiene:

$$v_{Th} = v_{ab} = V_0 - R_2 i$$

Inoltre, applicando la KCL al nodo che collega i generatori di corrente e la resistenza R_2 si ha

$$i = -g v_{Th} - I_0 - \alpha i \qquad \Rightarrow \qquad i = -\frac{g v_{Th} + I_0}{1+\alpha}$$

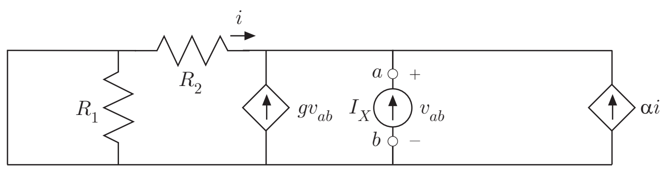
Sostituendo nella prima equazione di ottiene

$$v_{Th} = V_0 + \frac{gR_2}{1+\alpha}\, v_{Th} + \frac{R_2}{1+\alpha}\, I_0$$

da cui

$$v_{Th} = \frac{V_0 + \dfrac{R_2}{1+\alpha}\, I_0}{1 - \dfrac{gR_2}{1+\alpha}} = \frac{50 + \dfrac{100}{1+3}\cdot 2}{1 - \dfrac{0.02\cdot 100}{1+3}} = \frac{50 + 25\cdot 2}{1 - \dfrac{1}{2}} = 200 \text{ V}$$

Per il calcolo della resistenza equivalente si spengono i generatori indipendenti e, data la presenza di generatori dipendenti, si eccita il circuito ai morsetti ab con un generatore esterno (ad esempio di corrente). Il circuito da analizzare risulta quindi quello mostrato nella seguente figura:



Poiché nella resistenza R_1 non scorre corrente a causa del cortocircuito posto in parallelo ad essa, si vede immediatamente che

$$v_{ab} = -R_2 i$$

D'altra parte, applicando la KCL al nodo che collega i generatori di corrente e la resistenza R_2 si ha

$$i = -g v_{ab} - I_X - \alpha i \qquad \Rightarrow \qquad i = -\frac{g v_{ab} + I_X}{1+\alpha}$$

Sostituendo nella prima equazione di ottiene

$$v_{ab} = \frac{gR_2}{1+\alpha}\, v_{ab} + \frac{R_2}{1+\alpha}\, I_X$$

da cui

$$R_{Th} = \frac{v_{ab}}{I_X} = \frac{\dfrac{R_2}{1+\alpha}}{1 - \dfrac{gR_2}{1+\alpha}} = \frac{25}{1 - \dfrac{1}{2}} = 50\ \Omega$$

La potenza disponibile del generatore risulta quindi:

$$P_d = \frac{V_{Th}^2}{4R_{Th}} = \frac{200^2}{4 \cdot 50} = 200 \text{ W}$$

Se al generatore equivalente di Thevenin si collega la resistenza R_L, la tensione su di essa sarà:

$$V_L = \frac{R_L}{R_L + R_{Th}} \, V_{Th} = \frac{200}{200 + 50} \, V_{Th} = \frac{4}{5} \, 200 = 160 \text{ V}$$

e la potenza assorbita da R_L sarà quindi:

$$P_L = \frac{V_L^2}{R_L} = \frac{160^2}{200} = 128 \text{ W}$$

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PAVIA

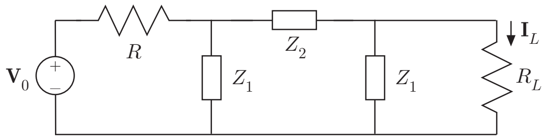
Laurea in Ingegneria Elettronica e Informatica

CAMPI ELETTROMAGNETICI E CIRCUITI I

19.09.2012

Soluzione del Problema 2

Passando al dominio dei fasori il circuito diventa



dove

$$\mathbf{V}_0 = V_0 = 1 \text{ V}$$

e le impedenze Z_1 e Z_2 sono date entrambe dalla formula seguente (ponendo $n = 1$ o $n = 2$):

$$Z_n = \frac{j\omega L_n \cdot \dfrac{1}{j\omega C_n}}{j\omega L_n + \dfrac{1}{j\omega C_n}} = \frac{j\omega L_n}{1 - \omega^2 L_n C_n} = j\sqrt{\frac{L_n}{C_n}}\, \frac{\omega\sqrt{L_n C_n}}{1 - \omega^2 L_n C_n} = jX_n\, \frac{\omega/\omega_n}{1 - (\omega/\omega_n)^2}$$

avendo introdotto le quantità

$$\omega_1 = \frac{1}{\sqrt{L_1 C_1}} = \frac{1}{\sqrt{25 \cdot 10^{-9} \cdot 2.5 \cdot 10^{-12}}} = 4 \cdot 10^9 \text{ rad/s}$$

$$\omega_2 = \frac{1}{\sqrt{L_2 C_2}} = \frac{1}{\sqrt{100 \cdot 10^{-9} \cdot 10 \cdot 10^{-12}}} = 10^9 \text{ rad/s}$$

$$X_1 = \sqrt{\frac{L_1}{C_1}} = \sqrt{\frac{25 \cdot 10^{-9}}{2.5 \cdot 10^{-12}}} = 100\ \Omega$$

$$X_2 = \sqrt{\frac{L_2}{C_2}} = \sqrt{\frac{100 \cdot 10^{-9}}{10 \cdot 10^{-12}}} = 100\ \Omega$$

Caso a: $\omega = 0$

Poiché $Z_1 = Z_2 = 0$, tutti i rami si comportano come dei cortocircuiti. Di conseguenza la resistenza R_L risulta cortocircuitata e in essa non fluisce corrente. Si ha quindi:

$$P_L = 0$$

Caso b: $\omega = 10^9$ rad/s

Poiché $\omega = \omega_2$, si ha $Z_2 = \infty$ e quindi il ramo superiore si comporta come un circuito aperto, disconnettendo il carico R_L dal generatore. Si ha pertanto

$$P_L = 0$$

Caso c: $\omega = 4 \cdot 10^9$ rad/s

Poiché $\omega = \omega_1$, si ha $Z_1 = \infty$ e quindi le due impedenze in verticale sono ininfluenti. Inoltre si ha

$$Z_2 = jX_2 \, \frac{\omega/\omega_2}{1 - (\omega/\omega_2)^2} = j100 \, \frac{4}{1 - 4^2} \approx -j \, 26.7 \, \Omega$$

La potenza assorbita è quindi data da:

$$P_L = \frac{R_L |\mathbf{I}_L|^2}{2} = \frac{R_L |\mathbf{V}_0|^2}{2|R + R_L + Z_2|^2} = \frac{200 \cdot 1}{2|100 + 200 - j \, 26.7|^2} \approx 1.1 \text{ mW}$$

Caso d: $\omega \to \infty$

Facendo il limite si ottiene che $Z_1 = Z_2 = 0$. Pertanto il circuito si comporta come nel caso a e si ha

$$P_L = 0$$

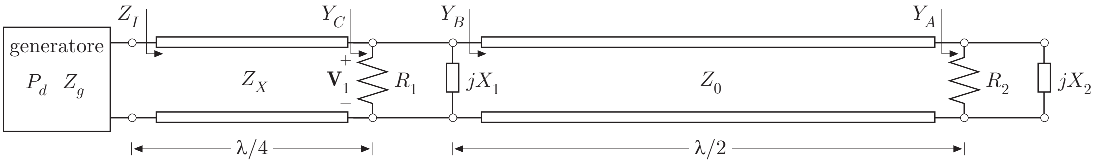
UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PAVIA
Laurea in Ingegneria Elettronica e Informatica

CAMPI ELETTROMAGNETICI E CIRCUITI I

19.09.2012

Soluzione del Problema 3

Con riferimento ai simboli introdotti nella seguente figura



tenendo conto delle proprietà delle line in mezz'd'onda, si ha:

$$Y_B = Y_A = \frac{1}{R_2} + \frac{1}{jX_2}$$

e quindi si ottiene

$$Y_C = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{jX_1} + Y_B = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} - j\left(\frac{1}{X_1} + \frac{1}{X_2}\right)$$

L'impedenza d'ingresso della linea in quarto d'onda senza perdite è data da

$$Z_I = \frac{Z_X^2}{Z_C} = Y_C Z_X^2 = \frac{1}{Z_X^2/Z_C}$$

Imponendo la condizione di adattamento ($Z_I = Z_0^*$) si ottiene il sistema

$$\begin{cases} Z_X^2\left(\dfrac{1}{R_1} + \dfrac{1}{R_2}\right) = Z_0 \\ Z_X^2\left(\dfrac{1}{X_1} + \dfrac{1}{X_2}\right) = 0 \end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad \begin{cases} Z_X = \sqrt{\dfrac{Z_0}{1/R_1 + 1/R_2}} = \sqrt{\dfrac{50}{1/25 + 1/100}} \approx 31.6\ \Omega \\ X_1 = -X_2 = 20\ \Omega \end{cases}$$

La potenza assorbita dalla resistenza R_2 coincide con la potenza attiva assorbita dall'ammettenza Y_B. Si ha quindi

$$P_1 = \frac{|\mathbf{V}_1|^2}{2R_1} \qquad\qquad P_2 = \frac{|\mathbf{V}_1|^2}{2}\,\mathrm{Re}\,Y_B^* = \frac{|\mathbf{V}_1|^2}{2R_2}$$

da cui

$$\frac{P_1}{P_2} = \frac{R_2}{R_1} = \frac{100}{25} = 4$$

Poiché tutte le linee sono senza perdite, tutta la potenza erogata (P_d) deve essere assorbita dalle due resistenze, cioé

$$P_d = P_1 + P_2 = 4P_2 + P_2 = 5P_2$$

e quindi

$$P_1 = \frac{4}{5}\,P_d = 80\ \text{mW} \qquad\qquad P_2 = \frac{1}{5}\,P_d = 20\ \text{mW}$$

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PAVIA

Laurea in Ingegneria Elettronica e Informatica

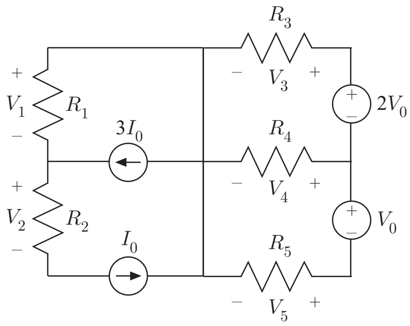
CAMPI ELETTROMAGNETICI E CIRCUITI I

19.02.2013

Problema 1

Tutti i generatori presenti nel circuito in figura funzionano in regime stazionario. Calcolare per tutte le resistenze il valore di tensione (con le convenzioni di segno indicate) e determinare le potenze assorbite o erogate da tutti gli elementi del circuito.

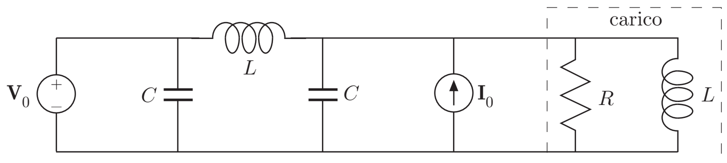
Dati: $R_1 = R_5 = 100\ \Omega$, $R_2 = R_4 = 50\ \Omega$, $R_3 = 200\ \Omega$, $I_0 = 0.1$ A, $V_0 = 10$ V.



Problema 2

Con riferimento al circuito in figura, in cui i due generatori operano in regime sinusoidale alla pulsazione ω, determinare la potenza attiva assorbita dal carico indicato nel rettangolo tratteggiato.

Dati: $\omega = 10^6$ rad/s, $\mathbf{V}_0 = 100$ V, $\mathbf{I}_0 = 2$ A, $R = 50\ \Omega$, $L = 50\ \mu$H, $C = 20$ nF.



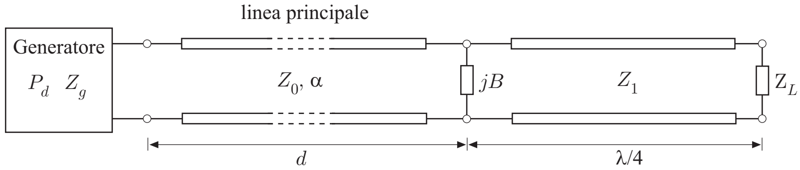
Problema 3

Con riferimento al circuito in figura, nell'ipotesi che le linee di trasmissione siano in aria e che le perdite nel tratto in quarto d'onda siano trascurabili, determinare i valori dell'impedenza caratteristica Z_1 e della suscettanza B in modo tale che la linea principale risulti adattata.

Dire con quale elemento può essere realizzata la suscettanza B e dimensionare tale elemento, sapendo che il generatore opera alla frequenza f.

Calcolare infine la potenza attiva assorbita dal carico Z_L.

Dati: $P_d = 100$ mW, $f = 10$ GHz, $Z_g = Z_0 = 50\ \Omega$, $Z_L = 200 + j100\ \Omega$, $d = 5$ m, $\alpha = 0.6$ dB/m.



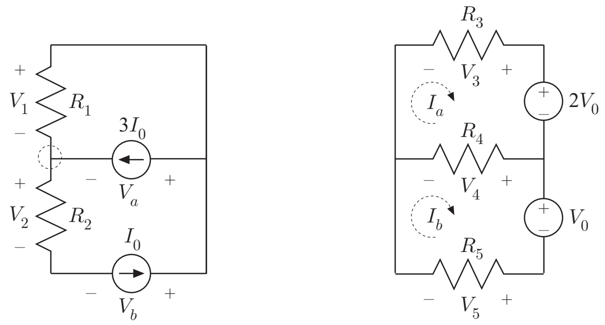
UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PAVIA
Laurea in Ingegneria Elettronica e delle Telecomunicazioni

CAMPI ELETTROMAGNETICI E CIRCUITI I

19.02.2013

Soluzione del Problema 1

Il circuito può essere separato in due parti che agiscono autonomamente, come mostrato nella seguente figura:



Applicando la KCL al nodo evidenziato nel circuito di sinistra si vede che sulla resistenza R_1 scorre una corrente pari a $2I_0$, entrante dal morsetto negativo della tensione. Si ha quindi:

$$V_1 = -R_1(2I_0) = -100 \cdot 2 \cdot 0.1 = -20 \text{ V}$$

Sulla resistenza R_2 scorre la corrente I_0 entrando dal morsetto positivo della tensione e quindi:

$$V_2 = R_2 I_0 = 50 \cdot 0.1 = 5 \text{ V}$$

Inoltre si ha che

$$V_a = V_1 = -20 \text{ V} \qquad\qquad V_b = V_2 + V_a = -15 \text{ V}$$

Applicando il metodo alle maglie al circuito di destra si ottiene:

$$\begin{cases} R_3 I_a + 2V_0 + R_4(I_a - I_b) = 0 \\ R_4(I_b - I_a) + V_0 + R_5 I_b = 0 \end{cases}$$

Tenendo conto del fatto che $R_3 = 4R_4$ e $R_5 = 2R_4$, risolvendo di ottiene

$$I_a = I_b = -\frac{V_0}{2R_4} = -\frac{10}{2 \cdot 50} = -0.1 \text{ mA}$$

Le tensioni sulle resistenze risultano quindi:

$$V_3 = -R_3 I_a = -200 \cdot (-0.1) = 20 \text{ V}$$

$$V_4 = R_4(I_a - I_b) = 50 \cdot (-0.1 + 0.1) = 0$$

$$V_5 = R_5 I_b = 100 \cdot (-0.1) = -10 \text{ V}$$

Le potenze assorbite o erogate dagli elementi del circuito sono quindi:

$$\begin{aligned}
P_{R_1} &= \frac{V_1^2}{R_1} = \frac{(-20)^2}{100} = 4 \text{ W} \qquad \text{(assorbita)}\\
P_{R_2} &= \frac{V_2^2}{R_2} = \frac{5^2}{50} = 0.5 \text{ W} \qquad \text{(assorbita)}\\
P_{R_3} &= \frac{V_3^2}{R_3} = \frac{20^2}{200} = 2 \text{ W} \qquad \text{(assorbita)}\\
P_{R_4} &= \frac{V_4^2}{R_4} = \frac{0^2}{50} = 0\\
P_{R_5} &= \frac{V_5^2}{R_5} = \frac{(-10)^2}{100} = 1 \text{ W} \qquad \text{(assorbita)}\\
P_{3I_0} &= V_a 3I_0 = -20 \cdot 0.3 = -6 \text{ W} \qquad \text{(erogata)}\\
P_{I_0} &= -V_b I_0 = 15 \cdot 0.1 = 1.5 \text{ W} \qquad \text{(assorbita)}\\
P_{2V_0} &= 2V_0 I_a = 20 \cdot (-0.1) = -2 \text{ W} \qquad \text{(erogata)}\\
P_{V_0} &= V_0 I_b = 10 \cdot (-0.1) = -1 \text{ W} \qquad \text{(erogata)}
\end{aligned}$$

Il bilancio di potenza complessivo risulta verificato:

$$P_{R_1} + P_{R_2} + P_{R_3} + P_{R_4} + P_{R_5} + P_{3I_0} + P_{I_0} + P_{2V_0} + P_{V_0} = 0$$

Si noti che, essendo il circuito separato in due sottocircuiti, anche i bilanci parziali di questi ultimi sono verificati:

$$P_{R_1} + P_{R_2} + +P_{3I_0} + P_{I_0} = 0$$

$$P_{R_3} + P_{R_4} + P_{R_5} + P_{2V_0} + P_{V_0} = 0$$

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PAVIA

Laurea in Ingegneria Elettronica e delle Telecomunicazioni

CAMPI ELETTROMAGNETICI E CIRCUITI I

19.02.2013

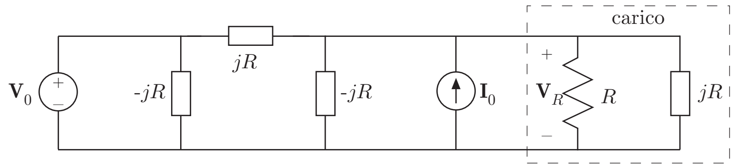
Soluzione del Problema 2

Le impedenze associate alle induttanze e alle capacità sono:

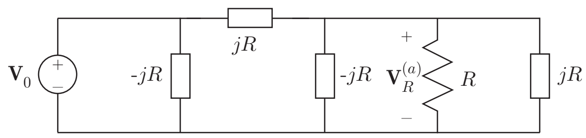
$$Z_C = jX_C = -j\frac{1}{\omega C} = -j\frac{1}{10^6 \cdot 20 \cdot 10^{-9}} = -j50\ \Omega = -jR$$

$$Z_L = jX_L = j\omega L = j10^6 \cdot 50 \cdot 10^{-6} = j50\ \Omega = jR$$

Pertanto il circuito da considerare è il seguente:



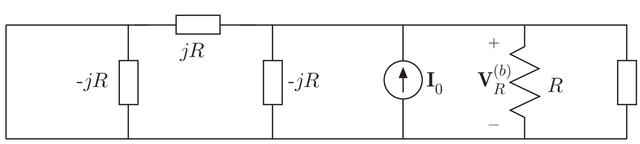
È evidente che la potenza attiva assorbita dal carico coincide con la potenza assorbita dalla resistenza R, per il cui calcolo è sufficiente calcolare la tensione $\mathbf{V}_R$.
Può convenire applicare il principio di sovrapposizione degli effetti.
Consideriamo il circuito in cui viene spento il generatore di corrente (sostituito da un circuito aperto):



I due elementi reattivi ai lati di R sono in parallelo e di valore opposto e quindi si cancellano. L'elemento jR nel ramo superiore e la resistenza R sono quindi in serie e sottoposte alla tensione $\mathbf{V}_0$. Si ha quindi:

$$\mathbf{V}_R^{(a)} = \frac{R}{R+jR}\,\mathbf{V}_0 = \frac{1-j}{2}\,\mathbf{V}_0 = (1-j)\,50\ \mathrm{V}$$

Consideriamo ora il circuito in cui viene spento il generatore di tensione (sostituito da un corto circuito):



In questo caso gli elementi alla sinistra del generatore di corrente hanno un'impedenza equivalente infinita. Infatti, l'elemento $-jR$ in parallelo al cortocircuito è ininfluente e gli altri due risultano in parallelo. Pertanto, il contributo alla tensione risulta:

$$\mathbf{V}_R^{(b)} = \frac{R(+jR)}{R+jR}\,\mathbf{I}_0 = j\,\frac{1-j}{2}\,R\,\mathbf{I}_0 = (1+j)\,50\ \mathrm{V}$$

Si ottiene infine

$$\mathbf{V}_R = \mathbf{V}_R^{(a)} + \mathbf{V}_R^{(b)} = (1 - j)\,50 + (1 + j)\,50 = 100 \text{ V}$$

da cui

$$P_R = \frac{|\mathbf{V}_R|^2}{2R} = \frac{100^2}{2 \cdot 50} = 100 \text{ W}$$

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PAVIA

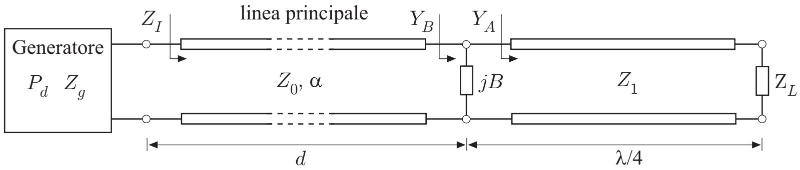
Laurea in Ingegneria Elettronica e delle Telecomunicazioni

CAMPI ELETTROMAGNETICI E CIRCUITI I

19.02.2013

Soluzione del Problema 3

Con riferimento ai simboli introdotti nella seguente figura



affinché la linea principale risulti adattata deve essere $Y_B = 1/Z_0$.
D'altra parte, tenendo conto delle proprietà delle linee in quarto d'onda si ha:

$$Y_B = jB + Y_A = jB + \frac{Y_1^2}{Y_L} = jB + \frac{Z_L}{Z_1^2} = jB + \frac{R_L + jX_L}{Z_1^2} = \frac{1}{Z_0}$$

dove R_L e X_L indicano rispettivamente la resistenza e la reattanza di Z_L. Separando la parte reale e quella immaginaria nella precedente equazione si ottiene:

$$Z_1 = \sqrt{R_L Z_0} = \sqrt{200 \cdot 50} = 100\ \Omega$$

$$B = -\frac{X_L}{Z_1^2} = -\frac{X_L}{R_L Z_0} = -\frac{100}{200 \cdot 50} = -10\ \text{mS}$$

Poiché la suscettanza B è negativa, può essere realizzata con un induttore di valore

$$L = -\frac{1}{\omega B} = \frac{1}{2\pi \cdot 10 \cdot 10^9 \cdot 0.01} \approx 1.59\ \text{nH}$$

Volendo evitare l'uso di elementi discreti, lo stesso valore di suscettanza potrebbe essere ottenuto con un tratto di linea in cortocircuito oppure aperta all'estremità.
Poiché la linea principale è adattata, indipendentemente dalla sua lunghezza l'impedenza d'ingresso coincide con l'impedenza caratteristica della linea ($Z_I = Z_0$). Ma essendo $Z_0 = Z_g$ anche il generatore risulta adattato ed eroga la sua potenza disponibile. Tale potenza sarà in parte dissipata lungo la linea principale; la rimanente parte sarà assorbita dal carico, dato che la suscettanza B e la linea in quarto d'onda non assorbono potenza. La potenza che giunge a Z_L coincide quindi con quella erogata a Y_B. Poiché la linea principale è adattata, tale potenza risulta:

$$P_L = P_d\, \mathrm{e}^{-2\alpha d} = P_d\, \mathrm{e}^{-2 \cdot \frac{0.6}{8.68} \cdot 5} = 0.25\, P_d = 50\ \text{mW}$$

Il calcolo dell'esponenziale poteva essere evitato notando che l'attenuazione totale sulla tratta (espressa in dB) è $-2\alpha d = -3$ dB, che corrisponde ad un dimezzamento della potenza.