UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PAVIA

Laurea in Ingegneria Elettronica e delle Telecomunicazioni

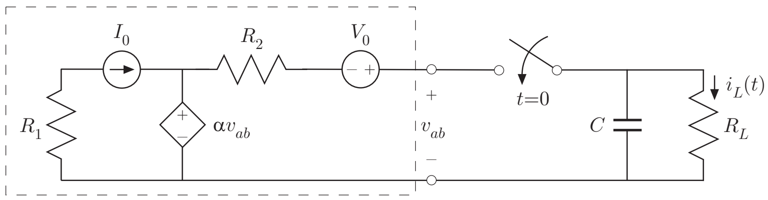
CAMPI ELETTROMAGNETICI E CIRCUITI I

26.01.2012

Problema 1

Dopo aver rappresentato la parte di circuito evidenziata dal rettangolo tratteggiato con un generatore equivalente di Thevenin o di Norton, si determini, per ogni istante di tempo, l'espressione della corrente sulla resistenza R_L, sapendo che l'interruttore si chiude all'istante $t = 0$. Si tracci infine l'andamento della i_L al variare del tempo.

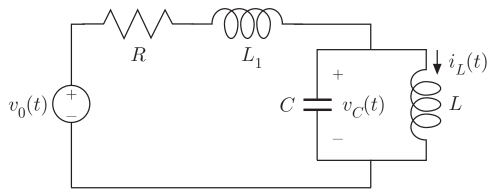
Dati: $V_0 = 100$ V, $I_0 = 5$ A, $\alpha = 0.5$, $R_1 = 20\ \Omega$, $R_2 = 50\ \Omega$, $R_L = 100\ \Omega$, $C = 20$ nF.



Problema 2

Con riferimento al circuito in figura, si calcolino i fasori corrispondenti alla tensione $v_C(t)$ e alla corrente $i_L(t)$ e, da questi, le espressioni di $v_C(t)$ e $i_L(t)$. Successivamente, si determinino le espressioni dell'energia immagazzinata nel condensatore e nell'induttore e se ne tracci il grafico dell'andamento temporale.

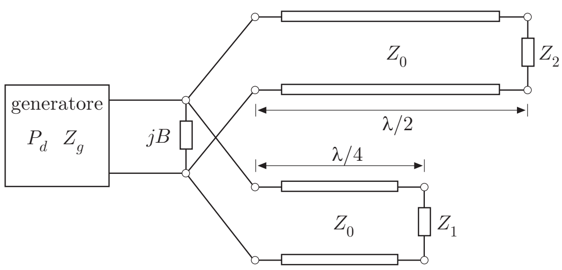
Dati: $v_0(t) = V_0 \cos\omega t$, $V_0 = 20$ V, $\omega = 10^6$ rad/s, $R = 50\ \Omega$, $L_1 = 10\ \mu$H, $L = 20\ \mu$H, $C = 50$ nF.



Problema 3

Con riferimento al circuito in figura, determinare quale valore deve assumere la suscettanza B affinché il generatore eroghi la potenza disponibile P_d. Calcolare quindi le potenze assorbite dai due carichi Z_1 e Z_2.

Dati: $P_d = 30$ mW, $Z_0 = 50\ \Omega$, $Z_g = Z_0$, $Z_1 = \dfrac{1+j}{2}\, Z_0$, $Z_2 = 2Z_0$.



UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PAVIA

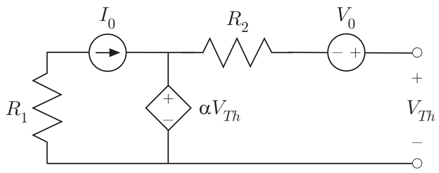
Laurea in Ingegneria Elettronica e delle Telecomunicazioni

CAMPI ELETTROMAGNETICI E CIRCUITI I

26.01.2012

Soluzione del Problema 1

In circuito da considerare per il calcolo della tensione equivalente di Thevenin è il seguente:



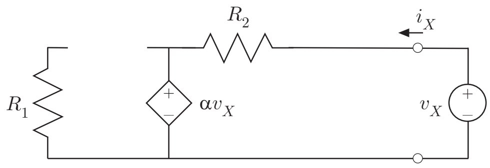
La caduta di potenziale sulla resistenza R_2 è nulla, poiché il morsetto a è aperto. Pertanto, applicando la KVL alla maglia che include il generatore comandato si ha:

$$V_{Th} = V_0 + \alpha V_{Th}$$

da cui

$$V_{Th} = \frac{V_0}{1-\alpha} = 2V_0 = 200 \text{ V}$$

Per il calcolo della resistenza equivalente di Thevenin si devono spegnere i generatori indipendenti. Inoltre, poiché nel circuito è presente un generatore dipendente, per il calcolo di R_{Th} è necessario collegare un generatore di prova ai morsetti ab, ad esempio di tensione, come mostrato nella seguente figura:



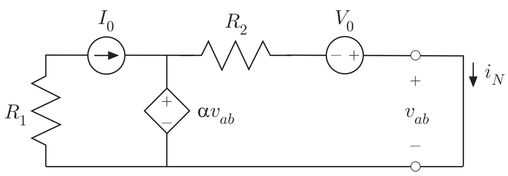
Applicando la KVL all'unica maglia del circuito, si ha

$$-\alpha v_X - R_2 i_X + v_X = 0$$

da cui

$$R_{Th} = \frac{v_X}{i_X} = \frac{R_2}{1-\alpha} = 2R_2 = 100 \ \Omega$$

Se si volesse ottenere il generatore equivalente di Norton, il circuito da considerare per il calcolo della corrente di corto circuito è il seguente:



Poiché $v_{ab} = 0$, applicando la KVL alla maglia di destra si ottiene

$$R_2 I_N - V_0 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad I_N = \frac{V_0}{R_2} = 2 \text{ A}$$

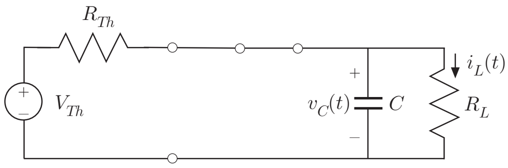
La resistenza del generatore di Norton coincide con quella del generatore di Thevenin:

$$R_N = R_{Th} = 100\ \Omega$$

e, inoltre, vale la relazione

$$V_{Th} = R_N I_N$$

Quando si chiude l'interruttore, si innesca un transitorio che può essere studiato considerando il seguente circuito:



Prima della chiusura dell'interruttore ($t = 0^-$) si ha

$$i_L(0^-) = 0 \qquad\qquad v_C(0^-) = 0$$

Immediatamente dopo la chiusura dell'interruttore, la tensione sul condensatore non può cambiare repentinamente e quindi si ha

$$v_C(0^+) = v_C(0^-) = 0 \qquad \Rightarrow \qquad i_L(0^+) = \frac{v_C(0^+)}{R_L} = 0$$

Trascorso un tempo sufficientemente lungo ($t \to \infty$), il circuito ritorna in regime stazionario e il condensatore si comporta come un circuito aperto. Pertanto il generatore indipendente vede come carico le due resistenze poste in serie, e la corrente diventa:

$$i_L(\infty) = \frac{V_{Th}}{R_{Th} + R_L} = \frac{200}{100 + 100} = 1\ \text{A}$$

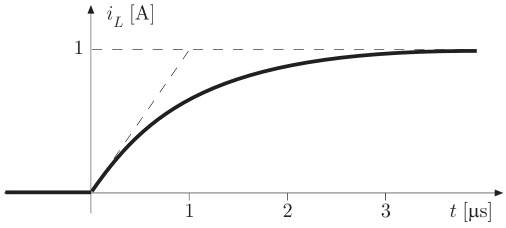
Per il calcolo della costante di tempo del circuito si spegne il generatore di tensione (sostituendolo con un corto circuito) e si determina la resistenza equivalente vista ai morsetti del condensatore che, per il circuito dato, coincide con il parallelo fra R_{Th} e R_L. Si ha quindi

$$\tau = R_{eq}C = \frac{R_{Th}R_L}{R_{Th} + R_L}\,C = \frac{100 \cdot 100}{100 + 100}\,20 \cdot 10^{-9} = 1\ \mu\text{s}$$

L'espressione della corrente risulta quindi:

$$i_L(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 - \mathrm{e}^{-t_{[\mu s]}}\ \text{A} & t > 0 \end{cases}$$

e il grafico del suo andamento è mostrato nella seguente figura:



UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PAVIA

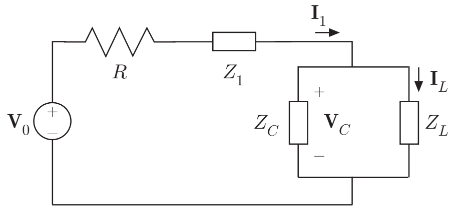
Laurea in Ingegneria Elettronica e delle Telecomunicazioni

CAMPI ELETTROMAGNETICI E CIRCUITI I

26.01.2012

Soluzione del Problema 2

Passando al dominio dei fasori il circuito diventa:



dove

$$\mathbf{V}_0 = V_0 = 20 \text{ V}$$

$$Z_1 = j\omega L_1 = j\,10^6 \cdot 10 \cdot 10^{-6} = j10 \; \Omega$$

$$Z_L = j\omega L = j\,10^6 \cdot 20 \cdot 10^{-6} = j20 \; \Omega$$

$$Z_C = -j\frac{1}{\omega C} = -j\frac{1}{10^6 \cdot 50 \cdot 10^{-9}} = -j20 \; \Omega$$

L'impedenza del parallelo fra il condensatore C e l'induttore L è

$$Z_{LC} = \frac{Z_C Z_L}{Z_C + Z_L} = \frac{-j20j20}{-j20 + j20} = \infty$$

e quindi i due elementi risuonano e si comportano come un corto circuito. Pertanto la corrente $\mathbf{I}_1$ è nulla e, poiché non c'è caduta di potenziale su R e su Z_1, si ha

$$\mathbf{V}_C = \mathbf{V}_0 = 20 \text{ V}$$

Poiché tale tensione è la stessa che c'è ai capi dell'induttore, si ha anche

$$\mathbf{I}_L = \frac{\mathbf{V}_C}{Z_L} = \frac{20}{j20} = -j \text{ A} = 1 \text{ e}^{-\pi/2} \text{ A}$$

Dalle espressioni precedenti si deduce

$$v_C(t) = 20 \cos \omega t \;\; \text{V}$$

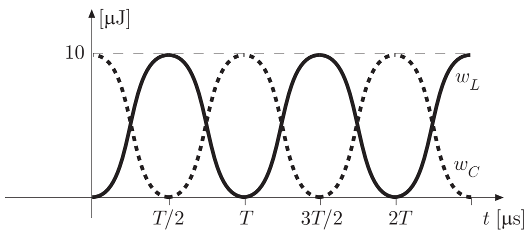
$$i_L(t) = \cos(\omega t - \pi/2) \;\; \text{A} = \sin \omega t \;\; \text{A}$$

Le espressioni delle energie immagazzinate dal condensatore e dall'induttore risultano

$$w_C = \frac{1}{2}\, C\, v_C^2(t) = \frac{1}{2}\, 50 \cdot 10^{-9}\, 20^2 \cos^2 \omega t = 10 \cos^2 \omega t \;\; \mu\text{J}$$

$$w_L = \frac{1}{2}\, L\, i_L^2(t) = \frac{1}{2}\, 20 \cdot 10^{-6}\, \sin^2 \omega t = 10 \sin^2 \omega t \;\; \mu\text{J}$$

e il loro andamento temporale è indicato nella figura seguente:



dove

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 6.28\ \mu\text{s}$$

È interessante osservare come negli elementi L e C fluisca corrente, anche se, complessivamente, la corrente che entra dall'esterno nell'elemento LC è nulla. La corrente i_L fa sì che l'energia immagazzinata nel circuito risonante si trasferisca dal condensatore C all'induttore L (e viceversa) ogni mezzo periodo, come risulta evidente dal grafico delle energie.

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PAVIA

Laurea in Ingegneria Elettronica e delle Telecomunicazioni

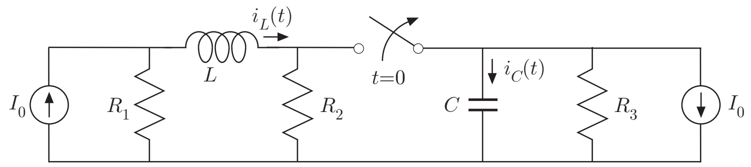
CAMPI ELETTROMAGNETICI E CIRCUITI I

22.02.2012

Problema 1

Con riferimento al circuito in figura, in cui l'interruttore si apre all'istante $t = 0$, determinare l'espressione delle correnti i_L e i_C per ogni istante di tempo, e tracciarne l'andamento al variare del tempo.

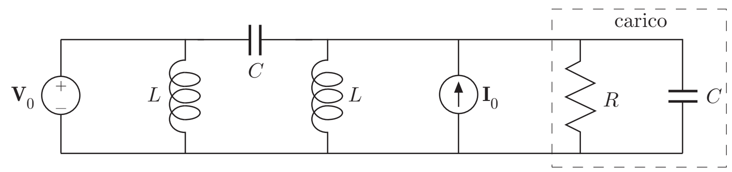
Dati: $I_0 = 3$ A, $R_1 = 100\ \Omega$, $R_2 = 200\ \Omega$, $R_3 = 50\ \Omega$, $L = 3\ \mu$H, $C = 0.4$ nF.



Problema 2

Con riferimento al circuito in figura, in cui i due generatori operano in regime sinusoidale alla pulsazione ω, determinare la potenza attiva assorbita dal carico indicato nel rettangolo tratteggiato.

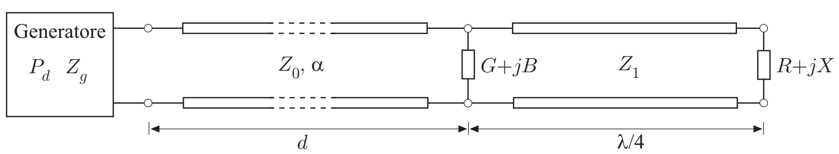
Dati: $\omega = 10^6$ rad/s, $\mathbf{V}_0 = 50$ V, $\mathbf{I}_0 = 1$ A, $R = 50\ \Omega$, $L = 50\ \mu$H, $C = 20$ nF.



Problema 3

Con riferimento al circuito in figura, determinare quale valore devono assumere la suscettanza B e l'impedenza caratteristica Z_1 della linea in quarto d'onda senza perdite, affinché la linea principale risulti adattata. In queste condizioni, determinare la potenza disponibile del generatore in modo che i due carichi R e G assorbano complessivamente la potenza P_L.

Dati: $Z_0 = 50\ \Omega$, $Z_g = Z_0$, $R = 100\ \Omega$, $X = 50\ \Omega$, $G = 10$ mS, $d = 1$ m, $\alpha = 0.1$ nep/m, $P_L = 10$ W.



UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PAVIA

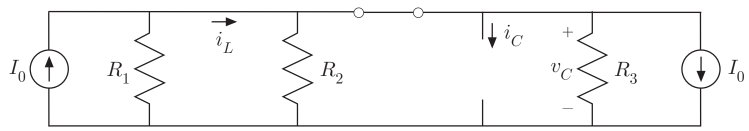
Laurea in Ingegneria Elettronica e delle Telecomunicazioni

CAMPI ELETTROMAGNETICI E CIRCUITI I

22.02.2012

Soluzione del Problema 1

Per $t < 0$ il circuito da considerare è il seguente:



Si nota che le tre resistenze sono in parallelo e ai loro capi c'è la tensione $v_C(0^-)$. Applicando la KCL al nodo superiore si ha

$$-I_0 + \frac{v_C(0^-)}{R_1} + \frac{v_C(0^-)}{R_2} + \frac{v_C(0^-)}{R_3} + I_0 = 0$$

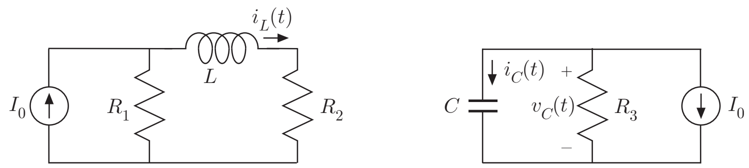
da cui

$$v_C(0^-) = 0$$

Quindi nelle resistenze non passa corrente e si ha

$$i_L(0^-) = I_0 = 3 \text{ A}$$

Quando si apre l'interruttore il circuito si separa in due circuiti del primo ordine, come mostrato nella figura seguente



a *b*

e per entrambi i sottocircuiti si innesca un transitorio.

Consideriamo dapprima il circuito a. All'istante $t = 0^+$ la corrente sull'induttore non può cambiare istantaneamente, e quindi si ha:

$$i_L(0^+) = i_L(0^-) = 3 \text{ A}$$

Per $t \to \infty$ il circuito torna in regime stazionario e la corrente $i_L(\infty)$ coincide con la corrente che fluisce in R_2:

$$i_L(\infty) = \frac{R_1}{R_1 + R_2}\, I_0 = \frac{100}{100 + 200}\, 3 = 1 \text{ A}$$

Per il calcolo della costante di tempo si deve spegnere il generatore di corrente (sostituendolo con un circuito aperto) e si vede che la resistenza equivalente collegata ai morsetti dell'induttore coincide con la serie di R_1 e R_2. Si ha quindi

$$\tau_L = \frac{L}{R_1 + R_2} = \frac{3 \cdot 10^{-6}}{100 + 200} = 10 \text{ ns}$$

L'espressione della corrente i_L risulta quindi:

$$i_L(t) = \begin{cases} 3 \text{ A} & t < 0 \\ 1 + 2\ \mathrm{e}^{-0.1\, t_{[\mathrm{ns}]}} \text{ A} & t > 0 \end{cases}$$

Consideriamo ora il circuito b. All'istante $t = 0^+$ la tensione sull condensatore non può cambiare istantaneamente e, pertanto, la corrente che fluisce nella resistenza R_3 è nulla. Applicando la KCL al nodo superiore si ottiene

$$i_C(0^+) = -I_0 = -3 \text{ A}$$

Per $t \to \infty$ il circuito torna in regime stazionario e la corrente che fluisce nel condensatore si annulla:

$$i_C(\infty) = 0$$

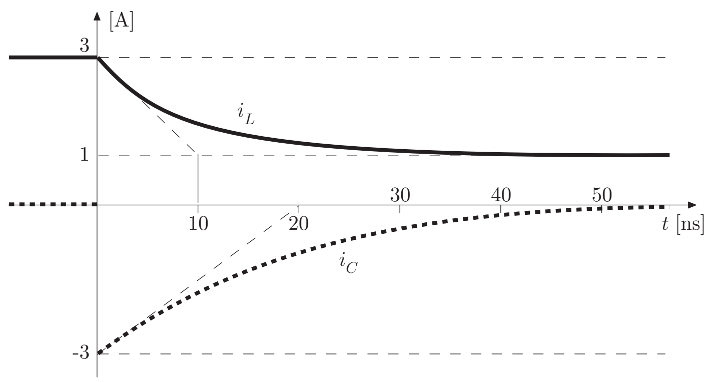
Per il calcolo della costante di tempo si deve spegnere il generatore di corrente (sostituendolo con un circuito aperto) e si vede che la resistenza collegata ai morsetti del condensatore è R_3. Si ha quindi

$$\tau_C = R_3 C = 50 \cdot 0.4 \cdot 10^{-9} = 20 \text{ ns}$$

L'espressione della corrente i_C risulta quindi:

$$i_C(t) = \begin{cases} 0 \text{ A} & t < 0 \\ -3\ \mathrm{e}^{-0.05\, t_{[\mathrm{ns}]}} \text{ A} & t > 0 \end{cases}$$

Il grafico dell'andamento delle correnti i_L e i_C è mostrato nella seguente figura:



UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PAVIA

Laurea in Ingegneria Elettronica e delle Telecomunicazioni

CAMPI ELETTROMAGNETICI E CIRCUITI I

22.02.2012

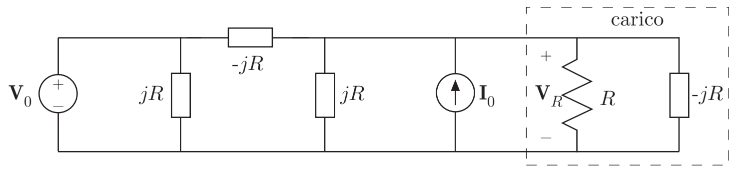
Soluzione del Problema 2

Le impedenze associate alle induttanze e alle capacità sono:

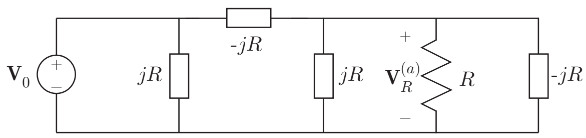
$$Z_C = jX_C = -j\frac{1}{\omega C} = -j\frac{1}{10^6 \cdot 20 \cdot 10^{-9}} = -j50\ \Omega = -jR$$

$$Z_L = jX_L = j\omega L = j10^6 \cdot 50 \cdot 10^{-6} = j50\ \Omega = jR$$

Pertanto il circuito da considerare è il seguente:



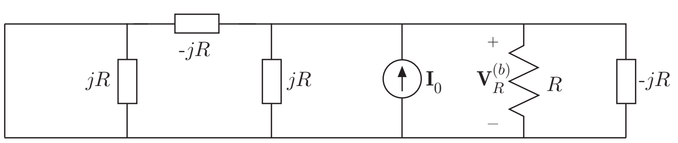
È evidente che la potenza attiva assorbita dal carico coincide con la potenza assorbita dalla resistenza R, per il cui calcolo è sufficiente calcolare la tensione $\mathbf{V}_R$.
Può convenire applicare il principio di sovrapposizione degli effetti.
Consideriamo il circuito in cui viene spento il generatore di corrente (sostituito da un circuito aperto):



I due elementi reattivi ai lati di R sono in parallelo e di valore opposto e quindi si cancellano. L'elemento $-jR$ nel ramo superiore e la resistenza R sono quindi in serie e sottoposte alla tensione $\mathbf{V}_0$. Si ha quindi:

$$\mathbf{V}_R^{(a)} = \frac{R}{R - jR}\,\mathbf{V}_0 = \frac{1+j}{2}\,\mathbf{V}_0 = (1+j)\,25\ \mathrm{V}$$

Consideriamo ora il circuito in cui viene spento il generatore di tensione (sostituito da un corto circuito):



In questo caso gli elementi alla sinistra del generatore di corrente hanno un'impedenza equivalente infinita. Infatti, l'elemento jR in parallelo al cortocircuito è ininfluente e gli altri due risultano in parallelo. Pertanto, il contributo alla tensione risulta:

$$\mathbf{V}_R^{(b)} = \frac{R(-jR)}{R - jR}\,\mathbf{I}_0 = -j\,\frac{1+j}{2}\,R\mathbf{I}_0 = (1-j)\,25\ \mathrm{V}$$

Si ottiene infine

$$\mathbf{V}_R = \mathbf{V}_R^{(a)} + \mathbf{V}_R^{(b)} = (1+j)\,25 + (1-j)\,25 = 50 \text{ V}$$

da cui

$$P_R = \frac{|\mathbf{V}_R|^2}{2R} = \frac{50^2}{2 \cdot 50} = 25 \text{ W}$$

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PAVIA

Laurea in Ingegneria Elettronica e delle Telecomunicazioni

CAMPI ELETTROMAGNETICI E CIRCUITI I

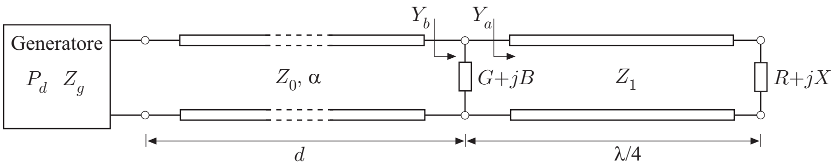
22.02.2012

Soluzione del Problema 3

Innanzitutto conviene osservare che

$$R = 2Z_0 \qquad\qquad X = Z_0 \qquad\qquad G = \frac{1}{2Z_0}$$

Con riferimento ai simboli introdotti nella seguente figura



e tenendo conto delle proprietà del tratto in quarto d'onda, si ottiene:

$$Y_a = \frac{R + jX}{Z_1^2} = \frac{2Z_0 + jZ_0}{Z_1^2}$$

Inoltre

$$Y_b = G + jB + Y_a = \frac{1}{2Z_0} + jB + \frac{2Z_0 + jZ_0}{Z_1^2}$$

Imponendo che la linea principale risulti adattata ($Y_b = 1/Z_0$) e separando l'equazione in parte reale e immaginaria, si ottiene il seguente sistema:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{2Z_0} + \dfrac{2Z_0}{Z_1^2} = \dfrac{1}{Z_0} \\ B + \dfrac{Z_0}{Z_1^2} = 0 \end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad \begin{cases} Z_1 = 2Z_0 = 100\ \Omega \\ B = -\dfrac{1}{4Z_0} = -5\ \text{mS} \end{cases}$$

Poiché le componenti reattive jB e jX non assorbono potenza attiva e la linea in quarto d'onda è senza perdite, tutta la potenza erogata al carico Y_b viene assorbita da G e da R. Inoltre, poiché il generatore è anch'esso adattato alla linea principale, tutta la potenza disponibile viene erogata. La potenza che giunge al carico adattato Y_a è data da

$$P_L = P_d\, \mathrm{e}^{-2\alpha d}$$

da cui

$$P_d = P_L\, \mathrm{e}^{2\alpha d} = P_L\, \mathrm{e}^{2 \cdot 0.1 \cdot 1} = 1.22\, P_d = 12.2\ \text{W}$$

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PAVIA

Laurea in Ingegneria Elettronica e Informatica

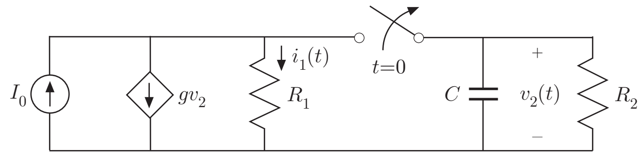
CAMPI ELETTROMAGNETICI E CIRCUITI I

4.06.2012

Problema 1

Con riferimento al circuito in figura, in cui l'interruttore si apre all'istante $t = 0$, determinare l'espressione della corrente i_1 per ogni istante di tempo, e tracciarne l'andamento al variare del tempo.

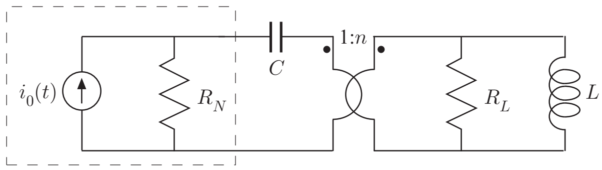
Dati: $I_0 = 10$ A, $R_1 = 100\ \Omega$, $R_2 = 50\ \Omega$, $g = 0.02$ S, $C = 10$ nF.



Problema 2

Con riferimento al circuito in figura, determinare n e C in modo tale che il generatore indicato nel rettangolo tratteggiato risulti adattato. In tale condizione, si calcolino le potenze attive e reattive su tutti gli elementi del circuito.

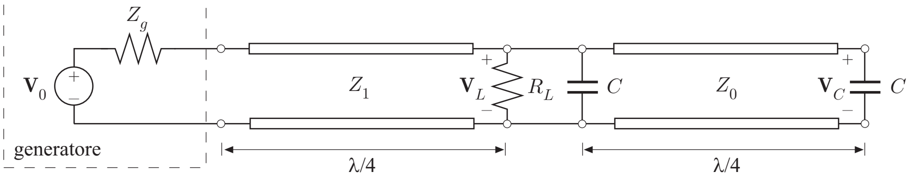
Dati: $i_0(t) = I_0 \cos \omega t$; $\omega = 10^9$ rad/s, $I_0 = 10$ mA, $R_N = 50\ \Omega$, $R_L = 1\ k\Omega$, $L = 1\ \mu$H.



Problema 3

Con riferimento al circuito in figura, nell'ipotesi che le perdite nelle linee di trasmissione siano trascurabili e che il generatore operi alla frequenza f, determinare i valori della capacità C e dell'impedenza caratteristica Z_1 affinché il generatore risulti adattato. Trovare quindi i valori in modulo e fase delle tensioni $\mathbf{V}_L$ e $\mathbf{V}_C$.

Dati: $\mathbf{V}_0 = 20$ mV, $f = 6$ GHz, $Z_0 = 50\ \Omega$, $Z_g = Z_0$, $R_L = 100\ \Omega$.



UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PAVIA

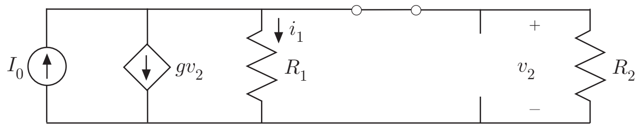
Laurea in Ingegneria Elettronica e Informatica

CAMPI ELETTROMAGNETICI E CIRCUITI I

4.06.2012

Soluzione del Problema 1

Per $t < 0$ il circuito da considerare è il seguente:



Applicando la KCL al nodo superiore si ottiene l'equazione:

$$-I_0 + gv_2(0^-) + \frac{v_2(0^-)}{R_1} + \frac{v_2(0^-)}{R_2} = 0$$

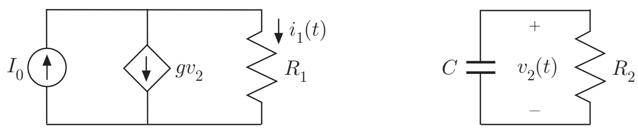
da cui

$$v_2(0^-) = \frac{I_0}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + g} = \frac{10}{\frac{1}{100} + \frac{1}{50} + 0.02} = 200 \text{ V}$$

Si ha inoltre

$$i_1(0^-) = \frac{v_2(0^-)}{R_1} = 2 \text{ A}$$

Quando si apre l'interruttore il circuito si separa in due circuiti, come mostrato nella figura seguente



che tuttavia non operano separatamente a causa della presenza nel circuito di sinistra del generatore dipendente dalla tensione v_2 del circuito di destra.
Si vede immediatamente che

$$i_1(t) = I_0 - gv_2(t)$$

dove v_2 avrà un andamento esponenziale decrescente poiché il circuito di destra è un circuito autonomo del primo ordine. Si ha infatti che

$$v_2(\infty) = 0$$

Inoltre, v_2 è la tensione ai capi del condensatore e quindi non può variare bruscamente quando l'interruttore viene commutato. Si ha pertanto

$$v_2(0^+) = v_2(0^-) = 200 \text{ V}$$

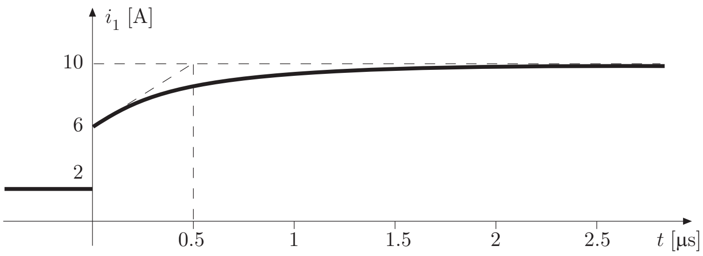
La costante di tempo con cui si scarica il condensatore è

$$\tau = R_2 C = 50 \cdot 10 \cdot 10^{-9} = 0.5 \ \mu\text{s}$$

L'espressione della corrente i_1 risulta quindi:

$$i_1(t) = \begin{cases} i_1(0^-) & t < 0 \\ I_0 - g v_2(0^+)\, \mathrm{e}^{-t/\tau} = 10 - 4\, \mathrm{e}^{-2\, t_{[\mu\mathrm{s}]}}\ \mathrm{A} & t > 0 \end{cases}$$

e la sua rappresentazione grafica è mostrata nella seguente figura:



UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PAVIA
Laurea in Ingegneria Elettronica e Informatica

CAMPI ELETTROMAGNETICI E CIRCUITI I

4.06.2012

Soluzione del Problema 2

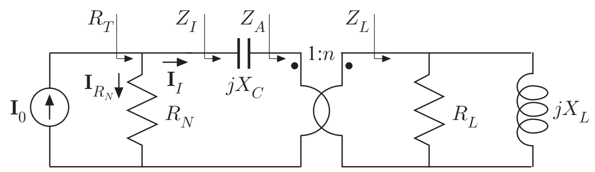
Alla frequenza di lavoro l'impedenza associata all'induttanza è:

$$Z_L = jX_L = j\omega L = j10^9 \cdot 10^{-6} = j1\ k\Omega = jR_L$$

e il fasore di corrente del generatore è:

$$\mathbf{I}_0 = I_0 = 10\ \text{mA}$$

Il circuito nel dominio dei fasori risulta quindi il seguente:



L'impedenza Z_A è data da

$$Z_A = \frac{Z_L}{n^2} = \frac{1}{n^2 Y_L} = \frac{1}{n^2\left(\dfrac{1}{R_L} + \dfrac{1}{jR_L}\right)} = \frac{(1+j)R_L}{2n^2}$$

Affinché il generatore risulti adattato deve essere verificata la condizione

$$Z_I = Z_A + jX_C = Z_N^* = R_N$$

da cui, separando parte reale e parte immaginaria, si ottiene

$$\begin{cases} \dfrac{R_L}{2n^2} = R_N \\ \dfrac{R_L}{2n^2} + X_C = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} n = \sqrt{\dfrac{R_L}{2R_N}} = \sqrt{10} \\ X_C = -\dfrac{R_L}{2n^2} = -50\ \Omega \end{cases}$$

Poiché $X_C = -1/\omega C$, si ha

$$C = -\frac{1}{\omega X_C} = \frac{1}{10^9 \cdot 50} = 20\ \text{pF}$$

Il generatore ideale di corrente eroga solo potenza attiva poiché ai suoi capi vede un carico puramente resistivo di valore $R_T = R_N || Z_I = R_N/2$. Il valore di tale potenza risulta

$$P_{gen} = \frac{1}{2} R_T |\mathbf{I}_0|^2 = \frac{R_N |\mathbf{I}_0|^2}{4} = \frac{50 \cdot 0.01^2}{4} = 1.25\ \text{mW}$$

Metà della potenza attiva erogata dal generatore viene assorbita dalla resistenza R_N. L'altra metà viene assorbita dal carico equivalente Z_I, in cui l'unico elemento in grado di assorbire potenza attiva è la resistenza R_L. Pertanto risulta

$$P_{R_N} = P_{R_L} = \frac{P_{gen}}{2} = 0.625\ \text{mW}$$

Inoltre, poiché $Z_I = R_N$ si ha

$$\mathbf{I}_I = \mathbf{I}_{R_N} = \mathbf{I}_0/2 = 5 \text{ mA}$$

e quindi la potenza reattiva sul condensatore risulta:

$$Q_{X_C} = \text{Im}\left\{\mathbf{S}_{X_C}\right\} = \text{Im}\left\{\frac{jX_C|\mathbf{I}_I|^2}{2}\right\} = \frac{X_C|\mathbf{I}_I|^2}{2} = \frac{-50 \cdot 0.005^2}{2} = -0.625 \text{ mVAR}$$

Dato che nel circuito in esame solo il condensatore e l'induttore sono in grado di immagazzinare energia, affinché sia verificato il bilancio della potenza reattiva deve essere

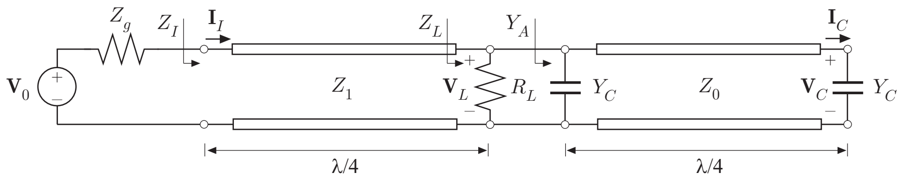
$$Q_{X_L} = -Q_{X_C} = 0.625 \text{ mVAR}$$

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PAVIA
Laurea in Ingegneria Elettronica e Informatica

CAMPI ELETTROMAGNETICI E CIRCUITI I
4.06.2012

Soluzione del Problema 3

Con riferimento ai simboli introdotti nella seguente figura



affinché il generatore risulti adattato deve essere $Z_I = Z_g^* = Z_0$.

L'impedenza d'ingresso di una linea in quarto d'onda senza perdite è puramente resistiva se e solo se il carico Z_L è resistivo. D'altra parte il carico Z_L è costituito dal parallelo della resistenza R_L e dell'ammettenza Y_A, che è puramente reattiva. Infatti, ricordando che l'ammettenza associata ai condensatori è $Y_C = jB_C = j\omega C$ e sfruttando le proprietà delle linee in quarto d'onda si ha

$$Y_A = Y_C + \frac{Y_0^2}{Y_C} = j\omega C - j\frac{Y_0^2}{\omega C} = j\omega C\left(1 - \frac{1}{(\omega C Z_0)^2}\right)$$

Pertanto, affinché Z_L sia reale deve essere

$$Y_A = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \omega C Z_0 = 1$$

da cui

$$C = \frac{1}{\omega Z_0} = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot 6 \cdot 10^9 \cdot 50} = 0.53 \text{ pF}$$

In queste condizioni si ha $Z_L = R_L$ e l'impedenza d'ingresso risulta

$$Z_I = \frac{Z_1^2}{R_L}$$

da cui

$$Z_1 = \sqrt{R_L Z_0} = \sqrt{R_L Z_0} = \sqrt{100 \cdot 50} = 50\sqrt{2}\ \Omega = Z_0\sqrt{2}$$

Osservando che

$$\mathbf{I}_I = \frac{\mathbf{V}_0}{2Z_0}$$

e ricordando le relazioni fra tensioni e correnti agli estremi di una linea in quarto d'onda senza perdite, si ha

$$\mathbf{V}_L = -jZ_1\mathbf{I}_I = -j\frac{Z_1}{2Z_0}\mathbf{V}_0 = -j\frac{\sqrt{2}}{2}\mathbf{V}_0 = 10\sqrt{2}\ \mathrm{e}^{-j\pi/2} \text{ mV}$$

e quindi

$$|\mathbf{V}_L| = 14.14 \text{ mV} \qquad\qquad \arg\{\mathbf{V}_L\} = -\pi/2$$

In maniera analoga si ottiene

$$\mathbf{V}_C = \frac{\mathbf{I}_C}{Y_C} = \frac{\mathbf{V}_L}{jZ_0}\,\frac{1}{j\omega C} = -\frac{\mathbf{V}_L}{\omega C Z_0} = -\mathbf{V}_L = 10\sqrt{2}\ \mathrm{e}^{j\pi/2} \text{ mV}$$

e quindi

$$|\mathbf{V}_C| = 14.14 \text{ mV} \qquad\qquad \arg\{\mathbf{V}_C\} = \pi/2$$

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PAVIA

Laurea in Ingegneria Elettronica e Informatica

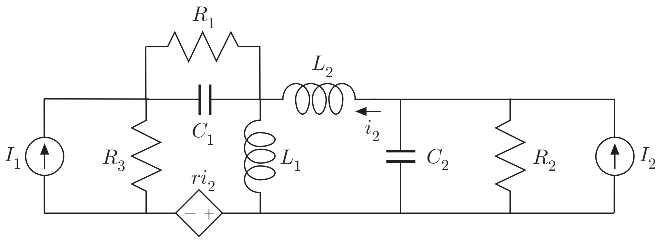
CAMPI ELETTROMAGNETICI E CIRCUITI I

6.07.2012

Problema 1

Con riferimento al circuito in figura, calcolare le potenze assorbite o erogate dai generatori e dalle resistenze, e le energie immagazzinate negli induttori e nei condensatori.

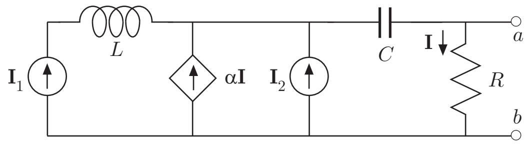
Dati: $I_1 = 0.4$ A, $I_2 = 50$ mA, $R_1 = R_2 = 50$ Ω, $R_3 = 100$ Ω, $r = 200$ Ω, $C_1 = 10$ nF, $C_2 = 50$ nF, $L_1 = L_2 = 1$ μH.



Problema 2

Con riferimento al circuito in figura, nel quale i generatori indipendenti funzionano alla pulsazione ω, determinare il generatore equivalente di Thevenin ai morsetti ab. Dire quindi quale deve essere l'impedenza di carico da collegare ai morsetti ab affinché il generatore eroghi la massima potenza e calcolare tale potenza.

Dati: $\omega = 10^7$ rad/s, $\mathbf{I}_1 = 1$ A, $\mathbf{I}_2 = 3$ A, $\alpha = 0.2$, $R = 40$ Ω, $C = 3$ nF, $L = 0.8$ μH.



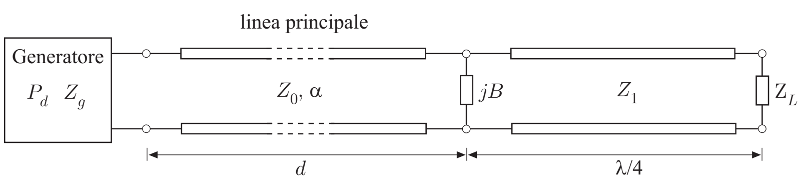
Problema 3

Con riferimento al circuito in figura, nell'ipotesi che le linee di trasmissione siano in aria e che le perdite nel tratto in quarto d'onda siano trascurabili, determinare i valori dell'impedenza caratteristica Z_1 e della suscettanza B in modo tale che la linea principale risulti adattata.

Dire con quale elemento può essere realizzata la suscettanza B e dimensionare tale elemento, sapendo che il generatore opera alla frequenza f.

Calcolare infine la potenza attiva assorbita dal carico Z_L.

Dati: $P_d = 100$ mW, $f = 2$ GHz, $Z_g = Z_0 = 50$ Ω, $Z_L = 100 - j100$ Ω, $d = 20$ m, $\alpha = 0.3$ dB/m.



UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PAVIA

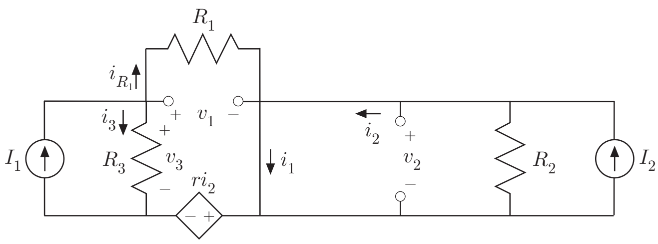
Laurea in Ingegneria Elettronica e Informatica

CAMPI ELETTROMAGNETICI E CIRCUITI I

6.07.2012

Soluzione del Problema 1

Poiché i generatori operano in regime stazionario, i condensatori si comportano come circuiti aperti e gli induttori come cortocircuiti. Il circuito da analizzare è quindi il seguente:



Si vede immediatamente che

$$v_2 = 0$$

poiché coincide con la tensione su un cortocircuito (i rami precedentemente occupati da L_1 e L_2). Di conseguenza, sulla resistenza R_2 non scorre corrente e quindi si ha

$$i_2 = I_2 = 50 \text{ mA}$$

Applicando la KVL alla maglia formata da R_1, R_3 e dal generatore comandato di tensione, e la KCL al nodo positivo di v_1 si ha:

$$\begin{cases} ri_2 + v_1 - R_3 i_3 = 0 \\ I_1 = i_3 + i_{R_1} \end{cases}$$

Ricavando i_3 dalla seconda equazione e sostituendola nella prima, tenendo conto che $v_1 = R_1 i_{R_1}$, si ottiene

$$i_{R_1} = \frac{R_3 I_1 - rI_2}{R_1 + R_3} = \frac{100 \cdot 0.4 - 200 \cdot 50 \cdot 10^{-3}}{50 + 100} = 0.2 \text{ A}$$

da cui

$$i_1 = i_2 + i_{R_1} = 0.25 \text{ A} \qquad v_1 = R_1 i_{R_1} = 50 \cdot 0.2 = 10 \text{ V}$$

$$i_3 = I_1 - i_{R_1} = 0.2 \text{ A} \qquad v_3 = R_3 i_3 = 100 \cdot 0.2 = 20 \text{ V}$$

Adottando la convenzione degli utilizzatori, le potenze assorbite dai diversi elementi sono:

$$\begin{aligned} P_{I_1} &= -v_3 I_1 = -8 \text{ W} \\ P_{I_2} &= -v_2 I_2 = 0 \\ P_{ri_2} &= ri_2(I_1 - i_3) = 2 \text{ W} \\ P_{R_1} &= R_1 i_{R_1}^2 = 2 \text{ W} \\ P_{R_2} &= R_2 i_2^2 = 0 \\ P_{R_3} &= R_3 i_3^2 = 4 \text{ W} \end{aligned}$$

Tenendo conto che induttori e condensatori non assorbono potenza in regime stazionario, si nota che il bilancio di potenze è soddisfatto e che l'unico elemento che eroga potenza al circuito è il generatore di corrente I_1.
Le energie immagazzinate negli induttori e nei condensatori risultano:

$$
\begin{aligned}
W_{L_1} &= \frac{1}{2}\, L_1 i_1^2 = 31.25 \text{ nJ} \\
W_{L_2} &= \frac{1}{2}\, L_2 i_2^2 = 1.25 \text{ nJ} \\
W_{C_1} &= \frac{1}{2}\, C_1 v_1^2 = 0.5\ \mu\text{J} \\
W_{C_2} &= \frac{1}{2}\, C_2 v_2^2 = 0
\end{aligned}
$$

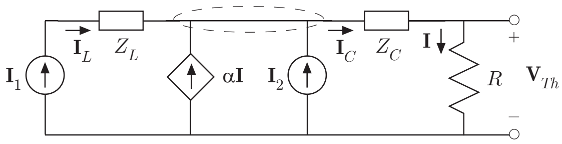
UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PAVIA
Laurea in Ingegneria Elettronica e Informatica

CAMPI ELETTROMAGNETICI E CIRCUITI I

6.07.2012

Soluzione del Problema 2

Introducendo le impedenze associate al condensatore e all'induttore, per il calcolo della tensione del generatore equivalente il circuito da considerare è il seguente:



Poiché $\mathbf{I}_L = \mathbf{I}_1$ e $\mathbf{I}_C = \mathbf{I}$, applicando la KCL al nodo indicato dal tratteggio si ottiene

$$\mathbf{I}_1 + \alpha\mathbf{I} + \mathbf{I}_2 - \mathbf{I} = 0$$

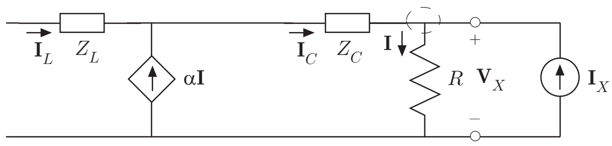
da cui

$$\mathbf{I} = \frac{\mathbf{I}_1 + \mathbf{I}_2}{1-\alpha}$$

e quindi

$$\mathbf{V}_{Th} = R\mathbf{I} = R\,\frac{\mathbf{I}_1 + \mathbf{I}_2}{1-\alpha} = 40\,\frac{1+3}{1-0.2} = 200 \text{ V}$$

Per il calcolo dell'impedenza equivalente si spengono i generatori indipendenti di corrente (sostituiti da circuiti aperti) e, a causa della presenza di un generatore comandato, è necessario introdurre un generatore esterno di prova, come mostrato nella seguente figura:



Applicando la KCL al nodo evidenziato in figura, osservando che $\mathbf{I}_L = 0$ e quindi $\mathbf{I}_C = \alpha\mathbf{I}$, si ha

$$\alpha\mathbf{I} + \mathbf{I}_X = \mathbf{I}$$

da cui

$$\mathbf{I}_X = (1-\alpha)\mathbf{I} = (1-\alpha)\,\frac{\mathbf{V}_X}{R}$$

e quindi

$$Z_{Th} = \frac{\mathbf{V}_X}{\mathbf{I_X}} = \frac{R}{1-\alpha} = \frac{40}{1-0.2} = 50\ \Omega$$

La potenza massima viene erogata quando ai morsetti ab viene collegato un carico d'impedenza

$$Z_L = Z_{Th}^{*} = 50\ \Omega$$

e tale potenza vale

$$P_d = \frac{|\mathbf{V}_{Th}|^2}{8R_{Th}} = 100 \text{ W}$$

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PAVIA

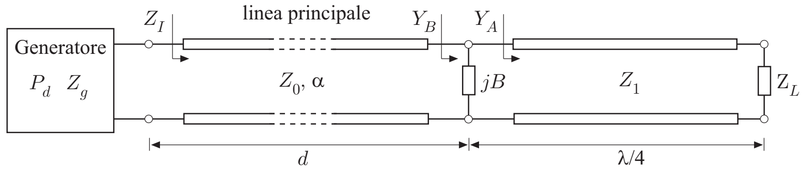
Laurea in Ingegneria Elettronica e Informatica

CAMPI ELETTROMAGNETICI E CIRCUITI I

6.07.2012

Soluzione del Problema 3

Con riferimento ai simboli introdotti nella seguente figura



affinché la linea principale risulti adattata deve essere $Y_B = 1/Z_0$.
D'altra parte, tenendo conto delle proprietà delle linee in quarto d'onda si ha:

$$Y_B = jB + Y_A = jB + \frac{Y_1^2}{Y_L} = jB + \frac{Z_L}{Z_1^2} = jB + \frac{R_L + jX_L}{Z_1^2} = \frac{1}{Z_0}$$

dove R_L e X_L indicano rispettivamente la resistenza e la reattanza di Z_L. Separando la parte reale e quella immaginaria nella precedente equazione si ottiene:

$$Z_1 = \sqrt{R_L Z_0} = \sqrt{100 \cdot 50} = 50\sqrt{2}\ \Omega$$

$$B = -\frac{X_L}{Z_1^2} = -\frac{X_L}{R_L Z_0} = \frac{1}{Z_0} = 20\ \text{mS}$$

Poiché la suscettanza B è positiva, può essere realizzata con un condensatore di valore

$$C = \frac{B}{\omega} = \frac{0.02}{2\pi 10^9} \approx 3.18\ \text{pF}$$

Volendo evitare l'uso di elementi discreti, lo stesso valore di suscettanza può essere ottenuto con un tratto di linea in cortocircuito oppure aperta all'estremità. Considerando, ad esempio, una linea in cortocircuito di impedenza caratteristica Z_0 e lunghezza ℓ, eguagliando la sua ammettenza d'ingresso al valore desiderato si ha

$$-j\,\frac{1}{Z_0 \tan\dfrac{2\pi\ell}{\lambda}} = jB = j\,\frac{1}{Z_0}$$

da cui

$$\tan\frac{2\pi\ell}{\lambda} = -1 \qquad \Rightarrow \qquad \ell = \frac{\lambda}{2\pi}\left(-\frac{\pi}{4} + n\pi\right) = -\frac{\lambda}{8} + n\frac{\lambda}{2}$$

Poiché per le linee date si ha $\lambda = c/f = 15$ cm, il tratto più corto possibile si ottiene ponendo $n = 1$ e risulta

$$\ell = -\frac{\lambda}{8} + \frac{\lambda}{2} = 3\,\frac{\lambda}{8} = 5.625\ \text{cm}$$

Si noti che la linea terminata con un circuito aperto sarebbe risultata più corta di un tratto pari a $\lambda/4$.

Poiché la linea principale è adattata, indipendentemente dalla sua lunghezza l'impedenza d'ingresso coincide con l'impedenza caratteristica della linea ($Z_I = Z_0$). Ma essendo $Z_0 = Z_g$ anche il generatore risulta adattato ed eroga la sua potenza disponibile. Tale potenza sarà in parte dissipata lungo la linea principale; la rimanente parte sarà assorbita dal carico, dato che la suscettanza B e la linea in quarto d'onda non assorbono potenza. La potenza che giunge a Z_L coincide quindi con quella erogata a Y_B. Poiché la linea principale è adattata, tale potenza risulta:

$$P_L = P_d \, \mathrm{e}^{-2\alpha d} = P_d \, \mathrm{e}^{-2 \cdot \frac{0.3}{8.68} \cdot 20} = 0.25 \, P_d = 25 \text{ mW}$$

Il calcolo dell'esponenziale poteva essere evitato notando che l'attenuazione totale sulla tratta (espressa in dB) è $-2\alpha d = -6$ dB, che corrisponde alla riduzione della potenza ad un quarto di quella iniziale.