Problemi

Problema 1)

1) Il segno di $g'(x) = -[2ax^2 + 2(b-a)x - (2b+a)]e^{2x-x^2}$ è opposto a quello del polinomio di secondo grado $p(x) = 2ax^2 + 2(b-a)x - (2b+a)$, che ha discriminante

$$\frac{\Delta}{4} = (b-a)^2 + 2a(2b+a) = 3a^2 + 2ab + b^2 = 2a^2 + (a+b)^2 > 0$$

per $a \neq 0$. Siccome $p(x)$ ha due radici reali e cambia segno due volte, $g(x)$ cambia monotonia due volte. Siccome

$$\lim_{x\to\pm\infty} g(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{ax+b}{e^{x^2-2x}} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{a}{2(x-1)e^{x^2-2x}} = 0$$

dalla formula di de L'Hopital, abbiamo che $g(x)$ ha un massimo assoluto positivo ed un minimo assoluto negativo.

Imponendo che i grafici di $f(x)$ e $g(x)$ passino per il punto $A = (2,1)$, otteniamo il sistema

$$\begin{cases} 4a - 2 + b = 1 \\ 2a + b = 1, \end{cases}$$

che ha come unica soluzione $a = 1$, $b = -1$.

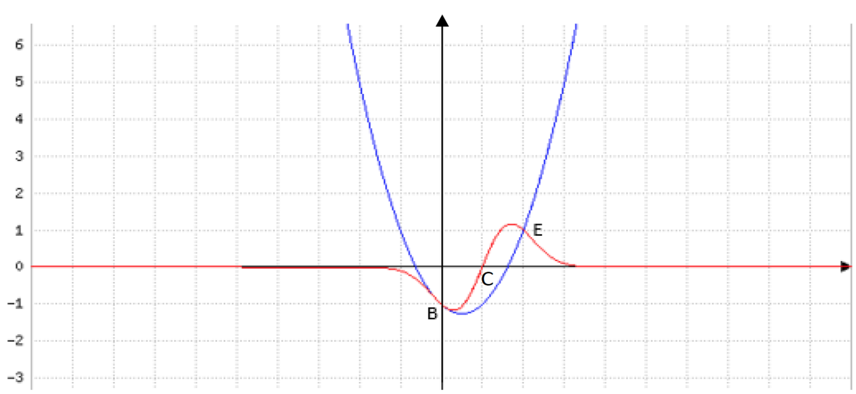
2) La funzione $f(x) = x^2 - x - 1$ è una parabola con vertice in $(\frac{1}{2}, -\frac{5}{4})$, concavitá verso l'alto ed intersezioni con gli assi in $(\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}, 0)$ e $B = (0,-1)$. Dal punto precedente abbiamo che $g'(x) = -[2x^2 - 4x + 1]e^{2x-x^2}$ e la funzione $g(x) = (x-1)e^{2x-x^2}$ ha un minimo assoluto in $x = \frac{2-\sqrt{2}}{2}$ con valore $-\sqrt{\frac{e}{2}}$ e un massimo assoluto in $x = \frac{2+\sqrt{2}}{2}$ con valore $\sqrt{\frac{e}{2}}$. Inoltre la funzione $g(x)$ è simmetrica rispetto al punto $(1,0)$, come si evince dalla proprietá

$$g(1+x) = xe^{1-x^2} = -g(1-x) = xe^{1-x^2}.$$

Siccome

$$g''(x) = 2(2x^3 - 2x^2 - x + 1)e^{2x-x^2} = 2(x-1)(2x^2-1)e^{2x-x^2}$$

è positiva in $(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}) \cup (1,+\infty)$, la funzione $g(x)$ ha la concavitá verso l'alto in $(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}) \cup (1,+\infty)$. Abbiamo quindi:



Verifichiamo ora che i grafici delle funzioni $f(x)$ e $g(x)$ sono tangenti nel punto B, determinando le equazioni delle rette tangenti al grafico di $f(x)$ e $g(x)$ in B e verificando che esse coincidono. Le retta tangenti al grafico di $f(x)$ e $g(x)$ in B sono

$$y = f'(x_B)(x - x_B) + y_B = -x - 1$$

e

$$y = g'(x_B)(x - x_B) + y_B = -x - 1,$$

rispettivamente, e pertanto coincidono. Abbiamo che i grafici di $f(x)$ e $g(x)$ si intersecano anche in $(2, 1)$ oltre che in $(0, -1)$, e quindi l'area della regione piana S compresa tra i due grafici è data da

$$\int_0^2 [g(x) - f(x)]dx = -\int_0^2 f(x)dx = -\int_0^2 (x^2 - x - 1)dx = -\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + x\Big|_0^2 = \frac{4}{3}$$

poiché $\int_0^2 g(x)dx = 0$ per simmetria del grafico di $g(x)$ rispetto a $(1, 0)$.

3) La circuitazione del campo magnetico $\vec{B}$ lungo un cammino chiuso $\mathcal{L}$, orientato in senso in orario, è espressa da

$$\Gamma_{\mathcal{L}}(\vec{B}) = \mu_0 \sum_k i_k$$

dove con i_k indichiamo le correnti concatenate con il cammino chiuso $\mathcal{L}$. Osserviamo che i_3 non è concatenata con il cammino $\mathcal{L}$. Abbiamo quindi che $\Gamma_{\mathcal{L}}(\vec{B}) = \mu_0(i_1 + i_2)$ vale

- $\Gamma_{\mathcal{L}}(\vec{B}) = \mu_0(2\,A + i_2)$ se i_2 ha verso entrante nel foglio;
- $\Gamma_{\mathcal{L}}(\vec{B}) = \mu_0(2\,A - i_2)$ se i_2 ha verso uscente nel foglio.

4) Sia $\theta(t)$ l'angolo formato al tempo t dalla normale alla superficie S ed il campo magnetico. Supponendo $\theta(0) = 0$, abbiamo che $\theta(t) = \omega t$ e quindi il flusso $\Phi(t)$ al tempo t del campo magnetico attraverso la superficie S è dato da

$$\Phi(t) = \frac{4B}{3}\cos\theta(t) = \frac{4B}{3}\cos(\omega t),$$

essendo l'area della regione piana S pari a $\frac{4}{3}$. La forza elettromotrice $f.e.m.(t)$ al tempo t vale

$$f.e.m.(t) = -\Phi'(t) = \frac{4B\omega}{3}\sin(\omega t)$$

e quindi l'intensitá di corrente $i(t)$ al tempo t si scrive come

$$i(t) = \frac{f.e.m.(t)}{R} = \frac{4B\omega}{3R}\sin(\omega t).$$

L'intensitá massima vale quindi $i_{max} = \frac{4B\omega}{3R}$, da cui ricaviamo

$$\omega = \frac{3Ri_{max}}{4B} = 5 \cdot 10^{-2}\ rad/s.$$

Problema 2)

1) Consideriamo l'espressione del campo magnetico

$$|\vec{B}| = \frac{ktr}{(t^2 + a^2)^{\frac{3}{2}}} \tag{1}$$

con il tempo espresso in s, l'intensitá del campo magnetico in T e la distanza r in m. Poiché le grandezze presenti a denominatore devono essere omogenee, l'unitá di misura di a è in secondi s. Inoltre, esplictiando da (1) la costante k otteniamo che

$$k = \frac{|\vec{B}|(t^2 + a^2)^{\frac{3}{2}}}{tr}$$

e quindi l'analisi dimensionale di k è $[k] = \frac{Ts^2}{m}$. La presenza di un campo magnetico all'interno del condensatore è dovuta alla cosiddetta corrente di spostamento: un campo elettrico variabile genera un campo magnetico sul piano perpendicolare al campo elettrico.
2) Grazie alla simmetria radiale il campo magnetico risulta costante in modulo e tangente in ogni punto alla generica circonferenza C_r, $r \leq R$, da cui segue che

$$|\Gamma_{C_r}(\vec{B})|(t) = 2\pi r B = \frac{2\pi r^2 kt}{(t^2 + a^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Dalle equazioni di Maxwell $|\Gamma_{C_r}(\vec{B})| = \mu_0\epsilon_0 \frac{d\Phi(\vec{E})}{dt}$ e quindi

$$\Phi(\vec{E}) = \int_0^t \frac{|\Gamma_{C_r}(\vec{B})|(s)}{\mu_0\epsilon_0} ds = \frac{2\pi r^2 k}{\mu_0\epsilon_0} \int_0^t \frac{s}{(s^2 + a^2)^{\frac{3}{2}}} ds = \frac{2\pi r^2 k}{\mu_0\epsilon_0} \left[\frac{1}{a} - (t^2 + a^2)^{-\frac{1}{2}}\right].$$

La differenza di potenziale ΔV tra le armature del condensatore, nelle approssimazioni date dal problema, è pari a

$$\Delta V = Ed = \frac{d\Phi}{\pi r^2} = \frac{2kd}{\mu_0\epsilon_0} \left[\frac{1}{a} - (t^2 + a^2)^{-\frac{1}{2}}\right].$$

Infine, abbiamo che

$$\lim_{t\to+\infty} |\vec{B}| = \lim_{t\to+\infty} \frac{ktr}{(t^2 + a^2)^{\frac{3}{2}}} = \lim_{t\to+\infty} \frac{kr}{t^2(1 + \frac{a^2}{t^2})^{\frac{3}{2}}} = 0.$$

Questo è ovvio dal punto di vista fisico poiché $\lim_{t\to+\infty} \Phi(\vec{E}) = \frac{2k\pi r^2}{\mu_0\epsilon_0 a}$ e un campo elettrico (asintoticamente) costante non genera (asintoticamente) alcun campo magnetico.
3) Osserviamo che la funzione è pari in quanto $F(t) = F(-t)$. Inoltre abbiamo che $F(a) = 0$ e

$$F'(t) = [(t^2 + a^2)^{-\frac{1}{2}} - a^{-1}]' = -\frac{2t}{2}(t^2 + a^2)^{-\frac{3}{2}} = f(t).$$

Siccome $F'(t) = f(t)$ è positiva in $(-\infty, 0)$, la funzione $F(t)$ ha un massimo assoluto in $x = 0$ ed ammette $y = -\frac{1}{a}$ come asintoto, come segue da

$$\lim_{t\to\pm\infty} F(t) = -\frac{1}{a}.$$

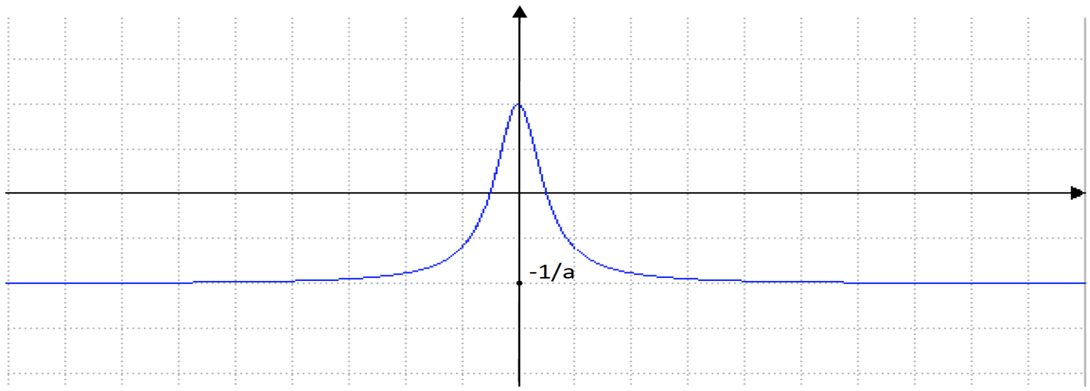
Abbiamo che

$$F''(t) = f'(t) = \frac{2t^2 - a^2}{(t^2 + a^2)^{\frac{5}{2}}}$$

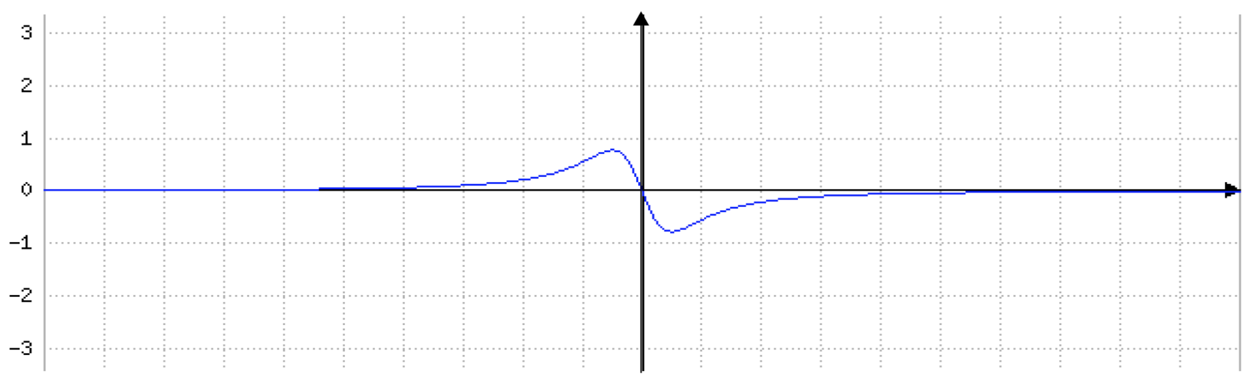
è positiva in $(-\frac{\sqrt{2}}{2}a, \frac{\sqrt{2}}{2}a)$, e quindi il grafico di $F(t)$ rivolge la concavitá verso l'alto in $(-\frac{\sqrt{2}}{2}a, \frac{\sqrt{2}}{2}a)$. Inoltre $F(t)$ ha in $\pm\frac{\sqrt{2}}{2}a$ due punti di flesso con pendenza m della retta tangente

$$m = F'(\pm\frac{\sqrt{2}}{2}a) = f(\pm\frac{\sqrt{2}}{2}a) = \mp\frac{2\sqrt{3}}{9a^2}.$$

Abbiamo quindi:



4) La funzione $f(t)$ è dispari ed ammette $y = 0$ come asintoto. La regione di convessitá della $F(t)$ rappresenta la regione di crescenza di $f(t)$, e quindi $f(t)$ ha un massimo assoluto in $t = -\frac{\sqrt{2}}{2}a$ ed un minimo assoluto in $t = \frac{\sqrt{2}}{2}a$. Abbiamo quindi:



Poiché la funzione $f(t)$ è dispari soddisfa la proprietá $\int_{-b}^{b} f(t)dt = 0$ per ogni $b > 0$. Per disparitá della funzione f abbiamo che l'area richiesta si esprime come

$$\int_{-\frac{\sqrt{2}}{2}a}^{\frac{\sqrt{2}}{2}a} |f(t)|dt = 2\int_{-\frac{\sqrt{2}}{2}a}^{0} f(t)dt = 2[F(0) - F(-\frac{\sqrt{2}}{2}a)] = \frac{2}{a}(1 - \sqrt{\frac{2}{3}}).$$

Questionario

1) Data la funzione $f(x) = \frac{p(x)}{x^2+d}$, con $d \in \mathbb{R}$ e $p(x)$ un polinomio, abbiamo che:

- il grafico di $f(x)$ interseca l'asse x nei punti di ascisse 0 e $\frac{12}{5}$ implica che $p(x)$ si annulla in $x = 0$ e $x = \frac{12}{5}$ e quindi si fattorizza come $p(x) = x(5x - 12)q(x)$, per un opportuno polinomio $q(x)$;
- il grafico di $f(x)$ ha $x = \pm 3$ e $y = 5$ come asintoti implica che $x^2 + d$ si annulla in $x = \pm 3$, ossia $d = -9$, e che $q(x) = 1$.

Abbiamo quindi determinato l'espressione della funzione: $f(x) = \frac{x(5x-12)}{x^2-9}$. La derivata

$$f'(x) = 6\frac{2x^2 - 15x + 18}{(x^2 - 9)^2} = 6\frac{(2x - 3)(x - 6)}{(x^2 - 9)^2}$$

è positiva in $(-\infty, -3) \cup (-3, \frac{3}{2}) \cup (6, +\infty)$, e quindi $f(x)$ ha un punto di massimo locale in $x = \frac{3}{2}$ ed un punto di minimo locale in $x = 6$.

2) La funzione $g(x)$ è un polinomio di grado dispari ed è ben noto che un polinomio di grado dispari ammette sempre almeno uno zero $x_0 \in \mathbb{R}$. Questa proprietá segue dal teorema degli zeri per funzioni continue e da

$$\lim_{x\to-\infty} g(x) = -\infty, \qquad \lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty.$$

Per provare che esiste un'unico zero x_0 basta osservare che la funzione $g(x)$ è strettamente crescente, avendo la derivata sempre positiva:

$$g'(x) = 1 + 3x^2 + \ldots + 2019x^{2018} > 0.$$

Infine, ponendo $a = 1,1$ abbiamo che $a > 1$ e vale

$$\lim_{x\to+\infty} a^x = \lim_{x\to+\infty} e^{x \ln a} = +\infty.$$

Dal teorema sul confronto tra ordini di infinito abbiamo che a^x tende all'∞ piú rapidamente di qualsiasi polinomio e quindi

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{g(x)}{a^x} = 0.$$

Questo limite puó essere calcolato anche applicando ripetutamente (ben 2019 volte) la formula di de L'Hopital alla forma indeterminata del tipo $\frac{\infty}{\infty}$:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{g(x)}{a^x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{g'(x)}{a^x \ln a} = \lim_{x\to+\infty} \frac{g''(x)}{a^x (\ln a)^2} = \ldots = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{d^{2109}g}{dx^{2109}}(x)}{a^x (\ln a)^{2019}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{(2019)!}{a^x (\ln a)^{2019}} = 0.$$

3) Dato il parallelepipedo rettangolo a base quadrata con spigolo di base $x > 0$ ed altezza $y > 0$, la somma delle lunghezze degli spigoli si esprime come $4(2x + y)$. Poiché la superficie totale del parallelipedo ha area $2x^2 + 4xy$, imponiamo la condizione $2x^2 + 4xy = S$, ossia $y = \frac{S-2x^2}{4x}$ e $x < \sqrt{\frac{S}{2}}$

affinché $y > 0$. Sostituendo il valore dell'altezza y nell'espressione della somma delle lunghezze degli spigoli, otteniamo che la funzione da minimizzare è

$$f(x) = \frac{S + 6x^2}{x}, \qquad 0 < x < \sqrt{\frac{S}{2}}.$$

La derivata

$$f'(x) = \frac{6x^2 - S}{x^2}$$

è negativa in $(0, \sqrt{\frac{S}{6}})$, e quindi $f(x)$ ha un punto di minimo assoluto in $x = \sqrt{\frac{S}{6}}$. Il parallelepipedo cercato è un cubo di spigolo $\sqrt{\frac{S}{6}}$.

4) Il luogo geometrico dei punti $P = (x, y, z)$ nello spazio tali che $\overline{PA} = \sqrt{2}\ \overline{PB}$ si determina imponendo $\overline{PA}^2 = 2\overline{PB}^2$, ossia

$$(x-2)^2 + y^2 + (z+1)^2 = 2[(x+2)^2 + (y-2)^2 + (z-1)^2],$$

da cui, sviluppando i conti, si ricava l'equazione cartesiana ella superficie S

$$x^2 + y^2 + z^2 + 12x - 8y - 6z + 13 = 0. \tag{2}$$

Ricordiamo che la condizione affinché l'equazione cartesiana $x^2 + y^2 + z^2 + ax + by + cz + d = 0$ descriva una superficie sferica è data da $a^2 + b^2 + c^2 - 4d \geq 0$, condizione che nel nostro caso

$$a^2 + b^2 + c^2 - 4d = 144 + 64 + 36 - 52 > 0$$

risulta verificata. Inoltre il centro si determina come $C = (-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2}, -\frac{c}{2})$ e nel nostro caso vale $C = (-6, 4, 3)$.

Si verifica facilmente che le coordinate del punto $T = (-10, 8, 7)$ soddisfano l'equazione cartesiana (2) e quindi il punto T appartiene alla superficie sferica S. Il piano tangente in T a S è il piano passante per T di vettore normale $\vec{n} = (x_n, y_n, z_n)$ con $x_n = x_C - x_T$, $y_n = y_C - y_T$ e $z_n = z_C - z_T$, ossia di equazione cartesiana

$$x_N(x - x_T) + y_N(y - y_T) + z_N(z - z_T) = 4(x + 10) - 4(y - 8) - 4(z - 7) = 0$$

con $\vec{n} = (4, -4, -4)$ o piú semplicemente $x - y - z + 25 = 0$.

5) Nel lancio di 4 dadi numerati da 1 a 6 il numero di possibili sequenze è dato da 6^4.
a) Le sequenze di lanci in cui la somma dei 4 numeri usciti non superi 5 sono solo 5, ossia $(1, 1, 1, 1)$ oppure $(2, 1, 1, 1)$ e le sue 3 permutazioni. La probabilitá che la somma dei 4 numeri usciti non superi 5 è quindi $\frac{5}{6^4} = \frac{5}{1296}$.
b) Per avere che il prodotto dei 4 numeri usciti sia multiplo di 3 serve che in almeno un lancio sia uscito 3 oppure 6. Le sequenze di lanci in cui è uscito 3 o 6 nel primo lancio sono 2×6^3; le sequenze di lanci in cui è uscito 3 o 6 nel secondo lancio ma non nel primo sono $4 \times 2 \times 6^2$; le sequenze di lanci in cui è uscito 3 o 6 nel terzo lancio ma non nei primi due sono $4^2 \times 2 \times 6$; le sequenze di lanci in cui è uscito 3 o 6 nel quarto lancio ma non nei primi tre sono $4^3 \times 2$. Sommando insieme le varie

possibilitá (sono tutte distinte), otteniamo che le sequenze di lanci in cui il prodotto dei 4 numeri usciti sia multiplo di 3 sono

$$2 \times 6^3 + 4 \times 2 \times 6^2 + 4^2 \times 2 \times 6 + 4^3 \times 2 = 1040$$

su 6^4 sequenze totali, per una probabilitá di $\frac{1040}{6^4} = \frac{65}{81}$.
c) Per avere che il massimo numero uscito sia 4 serve che nei lanci siano usciti tutti numeri ≤ 4 ma non siano usciti tutti numeri ≤ 3. Le sequenze di lanci in cui escono tutti numeri ≤ 4 sono 4^4, da cui vanno scartate le sequenze di lanci in cui escono tutti numeri ≤ 3 che sono 3^4. Otteniamo che le sequenze di lanci in cui il massimo numero uscito sia 4 sono $4^4 - 3^4 = 175$ su 6^4 sequenze totali, per una probabilitá di $\frac{175}{6^4} = \frac{175}{1296}$.

6) Il flusso $\Phi(t)$ al tempo t del campo magnetico attraverso la superficie S di area A è dato da $\Phi(t) = AB(t)$ e quindi la forza elettromotrice $f.e.m.(t)$ al tempo t vale

$$f.e.m.(t) = -\Phi'(t) = -AB'(t).$$

Il verso della corrente indotta è tale che il campo magnetico indotto si opponga alla variazione del campo magnetico B che l'ha generata. L'intensitá media della corrente tra due istanti t_1 e t_2 è data da

$$i_{t_1,t_2} = \frac{1}{R(t_2 - t_1)} \int_{t_1}^{t_2} f.e.m.(t)dt = \frac{A}{R(t_2 - t_1)}[B(t_1) - B(t_2)].$$

Detti $t_1 = 3\ ms$, $t_2 = 5\ ms$ e $t_3 = 10\ ms$ abbiamo che

$$i_{0,t_1} = 50\ mA, \quad i_{t_1,t_2} = -150\, mA, \quad i_{t_2,t_3} = 30\, mA.$$

7) La velocitá media v_1 della particella nel sistema solidale con il laboratorio è data da

$$v_1 = \frac{\Delta x}{\Delta t} = 1,25 \cdot 10^8\ m/s = 0,4169\, c.$$

Utilizzando la composizione relativistica delle velocitá per corpi in moto lungo la stessa direzione otteniamo che la velocitá media v_2 della particella nel sistema solidale con l'astronave vale

$$v_2 = \frac{v_1 - v}{1 - \frac{v_1 v}{c^2}} = -0,57\, c = -1,72 \times 10^8\ m/s.$$

Nel sistema solidale con il laboratorio consideriamo i due eventi di coordinate spazio-temporali $(0\, m, 0\, ns)$ e $(0,25\, m, 2\, ns)$. La distanza spaziale e temporale tra i due eventi visti dal sistema di riferimento dell'astronave si possono ottenere applicando le trasformazioni di Lorentz:

$$\Delta x_2 = \gamma(\Delta x_1 - v\Delta t_1), \qquad \Delta t_2 = \gamma(\Delta t_1 - \frac{v}{c^2}\Delta x_1),$$

ove $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \frac{5}{3}$. Sostituendo i valori si ottiene

$$\Delta x_2 = -0,3828\, m, \qquad \Delta t_2 = 2,22\, ns,$$

che forniscono un valore per $\frac{\Delta x_2}{\Delta t_2}$ coerente con il valore precedentemente trovato per v_2.

8) Il moto della carica è la composizione di un moto rettilineo uniforme con $\vec{v}_{||}$ nella direzione parallela a $\vec{B}$ e un moto circolare uniforme con velocita $\vec{v}_\perp$ nel piano perpendicolare a $\vec{B}$. Uguagliando la forza centripeta e la forza di Lorentz, ricaviamo

$$v_{\perp} = \frac{reB}{m} = 10,054 \cdot 10^3 \ m/s. \tag{3}$$

Inoltre osserviamo che la distanza percorsa in un periodo di rotazione T è uguale al passo dell'elica Δx; poiché $T = \frac{2\pi r}{v_{\perp}}$ ed usando (3) otteniamo che

$$v_{||} = \frac{\Delta x}{T} = \frac{eB\Delta x}{2\pi m} = 5,806 \cdot 10^3 \ m/s.$$

Quindi la velocitá v del protone vale

$$v = \sqrt{v_{||}^2 + v_{\perp}^2} = 11,6 \cdot 10^3 \ m/s.$$

L'angolo α formato da $\vec{v}$ e $\vec{B}$ soddisfa

$$\tan\alpha = \frac{v_{\perp}}{v_{||}} = 1,73,$$

da cui segue che α vale circa 60.

Prof.ssa Claudia Di Giulio, Liceo Classico F. Vivona, Roma
Prof. Pierpaolo Esposito, Universitá degli Studi Roma Tre, Roma
Prof. Danilo Riglioni, Liceo Scientifico Aristotele, Roma