Valutare la convergenza delle seguenti serie numeriche e l'eventuale somma

Esercizio no.1 *Soluzione a pag.2*

$$\sum_{1}^{+\infty} \frac{1}{n\cdot(n+1)}$$

Esercizio no.2 *Soluzione a pag.3*

$$\sum_{1}^{+\infty} \frac{n}{3n+1}$$

Esercizio no.3 *Soluzione a pag.3*

$$\sum_{1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$$

Esercizio no.4 *Soluzione a pag.3*

$$\sum_{1}^{+\infty} \frac{1}{n!}$$

Esercizio no.5 *Soluzione a pag.4*

$$\sum_{1}^{+\infty} \frac{1}{2^n}$$

Esercizio no.6 *Soluzione a pag.4*

$$\sum_{0}^{+\infty} \frac{1}{3^n}$$

Esercizio no.7 *Soluzione a pag.5*

$$\sum_{2}^{+\infty} \frac{1}{n\cdot(n-1)}$$

Esercizio no.8 *Soluzione a pag.6*

$$\sum_{1}^{+\infty} \frac{1}{2^{2n}}$$

Esercizio no.9 *Soluzione a pag.7*

$$\sum_{1}^{+\infty} \frac{n}{(n+1)!}$$

Esercizio no.10 *Soluzione a pag.8*

$$\sum_{1}^{+\infty} \frac{1}{n\cdot(n+3)}$$

Esercizio no.11 *Soluzione a pag.9*

$$\sum_{1}^{+\infty} \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}$$

Esercizio no.12 *Soluzione a pag.10*

$$\sum_{1}^{+\infty} \frac{1}{4n^2-1}$$

Esercizio no.1:soluzione

$\sum_{1}^{+\infty} \frac{1}{n\cdot(n+1)}$ abbiamo $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n\cdot(n+1)} = 0$ la serie può dunque convergere o divergere.

Applicando il criterio del rapporto:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{1}{(n+1)\cdot(n+2)}}{\frac{1}{n\cdot(n+1)}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n\cdot(n+1)}{(n+1)\cdot(n+2)} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n}{(n+2)} = 1$$

Il criterio del rapporto non decide, confrontando, allora la serie data con una serie nota certamente convergente:

$\frac{1}{n\cdot(n+1)} < \frac{1}{n^2}$ *valida* $\forall n$ per cui la serie è certamente convergente.

Valutando la somma notiamo che il termine n-esimo può essere scritto per il principio di identità dei polinomi:

$\frac{1}{n\cdot(n+1)} = \frac{A}{n} + \frac{B}{n+1} = \frac{An + A + Bn}{n\cdot(n+1)}$ deve risultare:

$\begin{cases} A = 1 \\ A + B = 0 \end{cases} \begin{cases} A = 1 \\ 1 + B = 0 \end{cases} \begin{cases} A = 1 \\ B = -1 \end{cases}$ quindi:

$$\sum_{1}^{+\infty} \frac{1}{n\cdot(n+1)} = \sum_{1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right)$$

$$s_n = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + .. = 1 - \frac{1}{n+1}$$

$$\lim_{n\to+\infty} s_n = \lim_{n\to+\infty} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1$$

per cui S=1.

Esercizio no.2:soluzione

$\sum_{1}^{+\infty} \frac{n}{3n+1}$ abbiamo $\lim_{n\to+\infty} \frac{n}{3n+1} = \frac{1}{3}$ la serie è divergente.

Esercizio no.3:soluzione

$\sum_{1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ il limite $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$ la serie può dunque convergere o divergere.

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{1}{\sqrt{n+1}}}{\frac{1}{\sqrt{n}}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}} = 1$$

Anche in questo caso il criterio del rapporto non decide, confrontando, allora la serie data con una serie nota:

$\frac{1}{n} < \frac{1}{\sqrt{n}}$ la serie data è maggiorante di una serie divergente.

La serie data è divergente.

Esercizio no.4:soluzione

$\sum_{1}^{+\infty} \frac{1}{n!}$ il limite $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n!} = 0$ la serie può dunque convergere o divergere

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{1}{(n+1)!}}{\frac{1}{n!}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n!}{(n+1)!} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n!}{(n+1)\cdot n!} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{(n+1)} = 0$$

Per il criterio del rapporto la serie converge e dato che: $\frac{1}{n} < \frac{1}{n^2}$ la serie converge anche per il criterio del confronto.

Esercizio no.5:soluzione

$\sum_{1}^{+\infty} \frac{1}{2^n}$ il limite $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2^n} = 0$ la serie può dunque convergere o divergere

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{1}{2^{n+1}}}{\frac{1}{2^n}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{2^n}{2^{n+1}} = \frac{1}{2}$$

Per il criterio del rapporto la serie converge applicando, inoltre, il criterio della radice:

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{2^n}} = \frac{1}{2} < 1 \qquad \text{(converge)}$$

$\sum_{1}^{+\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + ..$ è una serie geometrica di ragione $q = \frac{1}{2}$

$$s_n = a\left(\frac{1-q^n}{1-q}\right) = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1-\frac{1}{2^n}}{1-\frac{1}{2}}\right) = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\frac{2^n-1}{2^n}}{\frac{1}{2}}\right) = \left(\frac{2^n-1}{2^n}\right)$$

$$\lim_{n\to+\infty} s_n = \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{2^n-1}{2^n}\right) = 1$$

La somma della serie è 1.

Esercizio no.6:soluzione

$\sum_{0}^{+\infty} \frac{1}{3^n}$ il limite $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{3^n} = 0$ la serie può dunque convergere o divergere

confrontando, allora la serie data con una serie nota: $\frac{1}{3^n} < \frac{1}{2^n}$ per il criterio del confronto la serie è convergente dato che è minorante di una serie convergente.

$\sum_{0}^{+\infty} \frac{1}{3^n} = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + ..$ è una serie geometrica di ragione $q = \frac{1}{3}$

$$s_n = a \cdot \left(\frac{1-q^n}{1-q}\right) \equiv \left(\frac{1-\frac{1}{3^n}}{1-\frac{1}{3}}\right) = \left(\frac{\frac{3^n-1}{3^n}}{\frac{2}{3}}\right) = \frac{3}{2} \cdot \left(\frac{3^n-1}{3^n}\right)$$

$\lim_{n\to+\infty} s_n = \frac{3}{2}$ somma della serie.

Esercizio no.7:soluzione

$\sum_{2}^{+\infty}\frac{1}{n\cdot(n-1)}$ abbiamo $\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n\cdot(n-1)}=0$ la serie può dunque convergere o divergere

Dato che per il criterio del confronto $\frac{1}{n\cdot(n-1)}<\frac{1}{n^2}$ *valida* $\forall n$ la serie è certamente converge.

Notare che $\sum_{2}^{+\infty}\frac{1}{n\cdot(n-1)}=\frac{1}{2}+\sum_{3}^{+\infty}\frac{1}{n\cdot(n-1)}$

$\frac{1}{n^{1,5}}=\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}=\frac{1}{\sqrt{n^3}}=\frac{1}{n\sqrt{n}}$ è convergente perché del tipo $\frac{1}{n^p}$ con p=1,5>1

notando che $\frac{1}{n\sqrt{n}}>\frac{1}{n\cdot(n-1)}$ *verificata* $\forall n\geq 3$ la serie data è minorante di una serie

convergente e quindi converge anch'essa.

che il termine n-esimo può essere scritto per il principio di identità dei polinomi:

$\frac{1}{n\cdot(n-1)}=\frac{A}{n}+\frac{B}{n-1}=\frac{An-A+Bn}{n\cdot(n+1)}$ deve risultare:

$\begin{cases}-A=1\\A+B=0\end{cases}\begin{cases}A=-1\\-1+B=0\end{cases}\begin{cases}A=-1\\B=1\end{cases}$ quindi:

$$\sum_{2}^{+\infty}\frac{1}{n\cdot(n-1)}=\sum_{2}^{+\infty}\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)$$

$$s_n=\underbrace{\left(1-\frac{1}{2}\right)}_{n=2}+\underbrace{\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)}_{n=3}+\underbrace{\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)}_{n=4}+..=1-\frac{1}{n}$$

$$\lim_{n\to+\infty}s_n=\lim_{n\to+\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)=1$$

per cui S=1.

Esercizio no.8:soluzione

$\sum_{1}^{+\infty}\frac{1}{2^{2n}}$ il limite $\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{2^{2n}}=0$ la serie può dunque convergere o divergere

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{\frac{1}{2^{2n+1}}}{\frac{1}{2^{2n}}}=\lim_{n\to+\infty}\frac{2^{2n}}{2^{2n+1}}=\frac{1}{2}$$

Per il criterio del rapporto la serie converge applicando, inoltre, per il criterio del confronto

$\frac{1}{2^{2n}}<\frac{1}{2^n}$ che sappiamo convergere.

$\sum_{1}^{+\infty}\frac{1}{2^{2n}}=\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\frac{1}{64}+\frac{1}{256}+..$ è una serie geometrica di ragione $q=\frac{1}{4}$

$$s_n=a\cdot\left(\frac{1-q^n}{1-q}\right)=\frac{1}{4}\cdot\left(\frac{1-\frac{1}{4^n}}{1-\frac{1}{4}}\right)=\frac{1}{4}\cdot\left(\frac{\frac{4^n-1}{4^n}}{\frac{3}{4}}\right)=\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{4^n-1}{4^n}\right)$$

$$\lim_{n\to+\infty}s_n=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{3}\left(\frac{4^n-1}{4^n}\right)=\frac{1}{3}$$

La somma della serie è $\frac{1}{3}$.

Esercizio no.9:soluzione

$\sum_{1}^{+\infty} \frac{n}{(n+1)!}$ applicando il criterio del rapporto

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{n+1}{(n+2)!}}{\frac{n}{(n+1)!}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{(n+1)}{n} \cdot \frac{(n+1)!}{(n+2)\cdot(n+1)!} = \lim_{n\to+\infty} \frac{(n+1)}{n\cdot(n+2)} = 0$$

La serie è convergente, osservando il suo termine n-esimo.

$$\frac{n}{(n+1)!} = \frac{n+1-1}{(n+1)\cdot n!} = \frac{(n+1)-1}{(n+1)\cdot n!} = \frac{1}{n!} - \frac{1}{(n+1)!}$$

$$s_n = \underbrace{\left(1-\frac{1}{2!}\right)}_{n=1} + \underbrace{\left(\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}\right)}_{n=2} + \underbrace{\left(\frac{1}{3!}-\frac{1}{4!}\right)}_{n=3} + ..\left(\frac{1}{n!} - \frac{1}{(n+1)!}\right) + .. = 1 - \frac{1}{(n+1)!}$$

$$\lim_{n\to+\infty} s_n = \lim_{n\to+\infty}\left[1-\frac{1}{(n+1)!}\right] = 1$$ per cui S=1

Esercizio no.10:soluzione

$\sum_{1}^{+\infty}\frac{1}{n\cdot(n+3)}$ abbiamo $\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n\cdot(n+3)}=0$ la serie può dunque convergere o divergere.

applicando il criterio del confronto:

$\frac{1}{n\cdot(n+3)}=\frac{1}{n^2+3n}<\frac{1}{n^2}$ che è convergente

per cui la serie data è certamente convergente. Valutando la somma notiamo che il termine n-esimo può essere scritto per il principio di identità dei polinomi:

$$\frac{1}{n\cdot(n+3)}=\frac{A}{n}+\frac{B}{n+3}=\frac{An+3A+Bn}{n\cdot(n+1)}=\frac{n\cdot(A+B)+3A}{n\cdot(n+1)}$$ deve risultare:

$$\begin{cases}A=\frac{1}{3}\\A+B=0\end{cases}\quad\begin{cases}A=\frac{1}{3}\\\frac{1}{3}+B=0\end{cases}\quad\begin{cases}A=\frac{1}{3}\\B=-\frac{1}{3}\end{cases}$$ quindi:

$$\sum_{1}^{+\infty}\frac{1}{n\cdot(n+1)}=\sum_{1}^{+\infty}\left(\frac{1}{3n}-\frac{1}{3\cdot(n+1)}\right)=\frac{1}{3}\cdot\sum_{1}^{+\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$$

$$s_n=\frac{1}{3}\cdot\left[\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+..+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)+..\right]+..=\frac{1}{3}\cdot\left(1-\frac{1}{n+1}\right)$$

$$\lim_{n\to+\infty}s_n=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{3}\cdot\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=\frac{1}{3}$$

per cui $S=\frac{1}{3}$.

Esercizio no.11:soluzione

$\sum_{1}^{+\infty} \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}$ abbiamo $\lim_{n\to+\infty} \frac{2n+1}{n^2 \cdot (n+1)^2} = 0$ la serie può dunque convergere o divergere; si nota che:

$$\frac{2n+1}{n^2 \cdot (n+1)^2} = \frac{2n+1}{n^2(n^2+2n+1)} = \frac{2n+1}{n^4+2n^3+n^2} = \frac{2n}{n^4+2n^3+n^2} + \frac{1}{n^4+2n^3+n^2}$$

Dato che

$$\frac{2n}{n^4+2n^3+n^2} = \frac{2}{n^3+2n^2+n} < \frac{2}{n^3}$$

$$\frac{1}{n^4+2n^3+n^2} < \frac{1}{n^4}$$

La serie data è somma di due serie convergenti, deve dunque convergere.

$$\frac{2n+1}{n^2(n+1)^2} = \frac{A}{n^2} + \frac{B}{(n+1)^2} = \frac{A \cdot (n+1)^2 + Bn^2}{n^2(n+1)^2} = \frac{An^2+2An+A+Bn^2}{n^2(n+1)^2} =$$

$$= \frac{(A+B)n^2+2An+A}{n^2(n+1)^2}$$

Si ricava:

$$\begin{cases} A=1 \\ A+B=0 \end{cases} \begin{cases} A=1 \\ 1+B=0 \end{cases} \begin{cases} A=1 \\ B=-1 \end{cases}$$

$$\sum_{1}^{+\infty} \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2} = \sum_{1}^{+\infty}\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2}\right) = \left(1-\frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{4}-\frac{1}{9}\right) + \left(\frac{1}{9}-\frac{1}{16}\right) + .. + \frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2} + ..$$

$$s_n = 1 - \frac{1}{(n+1)^2} \qquad S = \lim_{n\to+\infty} s_n = \lim_{n\to+\infty}\left[1-\frac{1}{(n+1)^2}\right] = 1$$

Esercizio no.12:soluzione

$\sum_{1}^{+\infty}\frac{1}{4n^2-1}$ abbiamo $\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{4n^2-1}=0$ la serie può dunque convergere o divergere; si nota:

applicando il criterio del confronto

$\frac{1}{4n^2+1}<\frac{1}{n^2}$ è minorante di una serie convergente; quindi la serie data converge. Si ha:

$$\frac{1}{4n^2-1}=\frac{1}{(2n+1)\cdot(2n-1)}=\frac{A}{(2n+1)}+\frac{B}{(2n-1)}=\frac{2An-A+2Bn+B}{(2n+1)\cdot(2n-1)}=$$
$$=\frac{2(A+B)\cdot n+B-A}{(2n+1)\cdot(2n-1)}$$

$$\begin{cases}A+B=0\\B-A=1\end{cases}\begin{cases}A=-B\\B+B=1\end{cases}\begin{cases}A=-\frac{1}{2}\\B=\frac{1}{2}\end{cases}$$

$$\sum_{1}^{+\infty}\frac{1}{4n^2-1}=\sum_{1}^{+\infty}\left[\frac{1}{2\cdot(2n-1)}-\frac{1}{2\cdot(2n+1)}\right]=\frac{1}{2}\sum_{1}^{+\infty}\left[\frac{1}{(2n-1)}-\frac{1}{(2n+1)}\right]=$$
$$=\frac{1}{2}\cdot\left[1-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+..+\frac{1}{(2n-1)}-\frac{1}{(2n+1)}\right]=\frac{1}{2}\cdot\left[1-\frac{1}{(2n+1)}\right]=s_n$$

$$S=\lim_{n\to+\infty}s_n=\frac{1}{2}\lim_{n\to+\infty}\left[1-\frac{1}{(2n+1)}\right]=\frac{1}{2}$$