Servendosi della definizione, verifica l'esattezza dei limiti seguenti

Esercizio no.1 *Soluzione a pag.3*

$$\lim_{x \to 3} (2x - 5) = 1$$

Esercizio no.2 *Soluzione a pag.3*

$$\lim_{x \to 3} \frac{x+3}{x} = 2$$

Esercizio no.3 *Soluzione a pag.3*

$$\lim_{x \to 2} (x^2 + 1) = 5$$

Esercizio no.4 *Soluzione a pag.4*

$$\lim_{x \to 2} (3^x - 1) = 8$$

Esercizio no.5 *Soluzione a pag.4*

$$\lim_{x \to 0} (2x + 1) = 9$$

Esercizio no.6 *Soluzione a pag.4*

$$\lim_{x \to 3} (x + 5) = -2$$

Esercizio no.7 *Soluzione a pag.5*

$$\lim_{x \to 0} (4x^2 - 3) = -3$$

Esercizio no.8 *Soluzione a pag.5*

$$\lim_{x \to 3} \ln(x - 2) = 0$$

Esercizio no.9 *Soluzione a pag.5*

$$\lim_{x \to 2} 2^x = 4$$

Esercizio no.10 *Soluzione a pag.6*

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = 4$$

Esercizio no.11 *Soluzione a pag.6*

$$\lim_{x \to -1} \frac{1+2x}{x-1} = \frac{1}{2}$$

Esercizio no.12 *Soluzione a pag.7*

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x-1}{2x+3} = \frac{1}{2}$$

Esercizio no.13 *Soluzione a pag.8*

$$\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x} = 0$$

Esercizio no.14 *Soluzione a pag.8*

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x^2+1}{x^2} = 1$$

Esercizio no.15 *Soluzione a pag.9*

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x} = \infty$$

Esercizio no.16 *Soluzione a pag.10*

$$\lim_{x \to 2} \frac{1}{4x - x^2 - 4} = -\infty$$

Esercizio no.17 *Soluzione a pag.10*

$$\lim_{x \to 0^+} lg_2\, x = -\infty$$

Esercizio no.18 *Soluzione a pag.11*

$$\lim_{x \to 1^-} \frac{1}{1-x} = +\infty$$

Esercizio no.19 *Soluzione a pag.11*

$$\lim_{x \to 2^+} \frac{1+x}{2-x} = -\infty$$

Esercizio no.20 *Soluzione a pag.12*

$$\lim_{x \to 0^-} -\frac{1}{e^{1/x}} = -\infty$$

Esercizio no.1:soluzione

$$\lim_{x\to 3}(2x-5)=1$$

secondo la definizione, bisogna far vedere che prefissato un ε>0, si può trovare in corrispondenza di esso un altro numero δ>0 tale che $\forall x \neq 0$ sia soddisfatta la condizione $3-\delta < x < 3+\delta$:

$$1-\varepsilon < 2x-5 < 1+\varepsilon \quad\rightarrow\quad 6-\varepsilon < 2x < 6+\varepsilon \quad\rightarrow\quad 3-\frac{\varepsilon}{2} < x < 3+\frac{\varepsilon}{2}$$

questa ultima individua un intorno di x=3; il limite è pertanto verificato.

Esercizio no.2:soluzione

$$\lim_{x\to 3}\frac{x+3}{x}=2$$ poniamo:

$$2-\varepsilon < \frac{x+3}{x} < 2+\varepsilon \quad\rightarrow\quad 2-\varepsilon < 1+\frac{3}{x} < 2+\varepsilon \quad\rightarrow\quad 1-\varepsilon < \frac{3}{x} < 1+\varepsilon$$ si ha:

$$\begin{cases}\dfrac{3}{x} > 1-\varepsilon \\ \dfrac{3}{x} < 1+\varepsilon\end{cases} \quad \begin{cases}\dfrac{3}{1-\varepsilon} > x \\ \dfrac{3}{1+\varepsilon} < x\end{cases} \quad\rightarrow\quad \frac{3}{1-\varepsilon} < x < \frac{3}{1+\varepsilon}$$

preso ε>0, piccolo a piacere l'intervallo trovato è un intorno circolare di x=3; il limite è pertanto verificato.

Esercizio no.3:soluzione

$$\lim_{x\to 2}(x^2+1)=5$$ poniamo:

$$5-\varepsilon < x^2+1 < 5+\varepsilon \quad\rightarrow\quad 4-\varepsilon < x^2 < 4+\varepsilon \quad\rightarrow\quad \sqrt{4-\varepsilon} < x < \sqrt{4+\varepsilon}$$

dato che $\sqrt{4-\varepsilon} < 2 < \sqrt{4+\varepsilon}$
abbiamo individuato un intorno di x=2; la condizione $2-\delta < x < 2+\delta$ è verificata e quindi anche il limite.

Esercizio no.4:soluzione

$\lim_{x \to 2} (3^x - 1) = 8$ poniamo:

$$8 - \varepsilon < 3^x - 1 < 8 + \varepsilon \quad \to \quad 9 - \varepsilon < 3^x < 9 + \varepsilon \quad \to \quad lg_3(9 - \varepsilon) < x < lg_3(9 + \varepsilon)$$

dato che preso un *e*>0 arbitrariamente piccolo a piacere risulta:

$$lg_3(9 - \varepsilon) < 2 < lg_3(9 + \varepsilon)$$

abbiamo individuato un intorno di x=2; la condizione $2 - \delta < x < 2 + \delta$ è verificata e quindi anche il limite.

Esercizio no.5:soluzione

$\lim_{x \to 0} (2x + 1) = 9$

secondo la definizione, bisogna far vedere che prefissato un ε>0, si può trovare in corrispondenza di esso un altro numero δ>0 tale che $\forall x \neq 0$ sia soddisfatta la condizione $2 - \delta < x < 2 + \delta$:

$9 - \varepsilon < 2x + 1 < 9 + \varepsilon$ ne segue che:

$$8 - \varepsilon < 2x < 8 + \varepsilon \quad \to \quad 4 - \frac{\varepsilon}{2} < x < 4 + \frac{\varepsilon}{2}$$

posto $\delta = \frac{\varepsilon}{e}$ quest'ultima individua un intorno di x=4 e non di x=2.
Il limite è pertanto <u>non</u> verificato.

Esercizio no.6:soluzione

$\lim_{x \to 3} (x + 5) = -2$

secondo la definizione, bisogna far vedere che prefissato un ε>0, si può trovare in corrispondenza di esso un altro numero δ>0 tale che $\forall x \neq 0$ sia soddisfatta la condizione $3 - \delta < x < 3 + \delta$:

$$-2 - \varepsilon < x + 5 < -2 + \varepsilon \quad \to \quad -7 - \varepsilon < x < -7 + \varepsilon$$

posto $\delta = \varepsilon$ quest'ultima individua un intorno di x= -7 e non di x=3. Il limite è pertanto <u>non</u> verificato.

Esercizio no.7:soluzione

$\lim_{x\to 0} (4x^2 - 3) = -3$ poniamo:

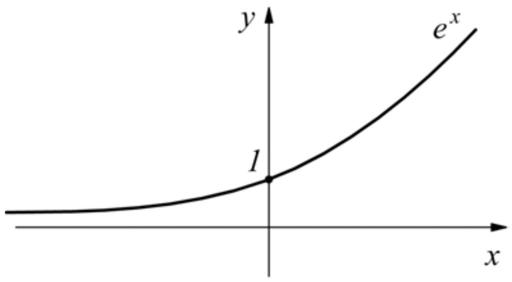
$$-3-\varepsilon < 4x^2 - 3 < -3+\varepsilon \quad \rightarrow \quad -\varepsilon < 4x^2 < \varepsilon \quad \rightarrow \quad -\frac{\sqrt{\varepsilon}}{2} < x < \frac{\sqrt{\varepsilon}}{2}$$

è stato individuato un intorno di x=0 che soddisfa la condizione $-\delta < x < \delta$: e che verifica il limite.

Esercizio no.8:soluzione

$\lim_{x\to 3} ln(x-2) = 0$ posto:

$$-\varepsilon < ln(x-2) < \varepsilon \quad \rightarrow \quad e^{-\varepsilon} < x-2 < e^{\varepsilon} \quad \rightarrow \quad 2+\frac{1}{e^{\varepsilon}} < x < 2+e^{\varepsilon}$$



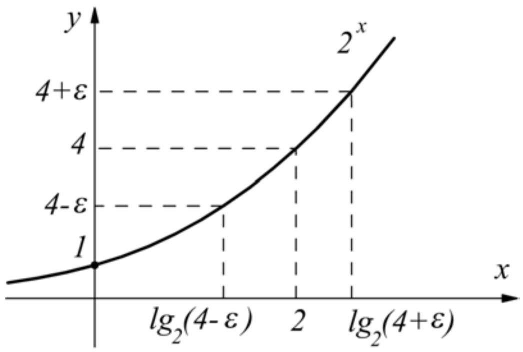
Osservando la funzione $y=e^x$ si riconosce chese $\varepsilon>0$ piccolo a piacere, la quantità e^{ε} è leggermente maggiore di 1.
Per contro la quantità $1/e^{\varepsilon}$ è leggermente minore di 1; ne consegue:

$2+\frac{1}{e^{\varepsilon}} < 3 < 2+e^{\varepsilon}$ cioè abbiamo individuato un intorno di x=3 all'interno del quale vi sono valori di x (escludendo x=3) che soddisfano alla: $-\varepsilon < ln(x-2) < \varepsilon$
con ε scelto piccolo in modo arbitrario.

Esercizio no.9:soluzione

$\lim_{x\to 2} 2^x = 4$ posto:

$$4-\varepsilon < 2^x < 4+\varepsilon \quad \rightarrow \quad lg_2(4-\varepsilon) < x < lg_2(4+\varepsilon)$$



questi ultimi valori, costituiscono un intorno completo di 2, viene dunque soddisfatta la relazione:

$$x_0 - \delta < x < x_0 + \delta \quad \Rightarrow \quad 2-\delta < x < 2+\delta$$

Esercizio no.10:soluzione

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x-2}=4$$ posto:

$$4-\varepsilon<\frac{x^2-4}{x-2}<4+\varepsilon \quad\to\quad 4-\varepsilon<\frac{\cancel{(x-2)}(x+2)}{\cancel{x-2}}<4+\varepsilon \quad\to\quad 2-\varepsilon<x<2+\varepsilon$$

ponendo $\varepsilon=\delta$ abbiamo individuato un intorno completo del 2, verificando, perciò il limite.

Esercizio no.11:soluzione

$$\lim_{x\to -1}\frac{1+2x}{x-1}=\frac{1}{2}$$ avremo

$$\frac{1}{2}-\varepsilon<\frac{1+2x}{x-1}<\frac{1}{2}+\varepsilon \;\to\; -\varepsilon<\frac{1+2x}{x-1}-\frac{1}{2}<\varepsilon \;\to\; -\varepsilon<\frac{2+4x-x+1}{2x-2}<\varepsilon$$ da cui:

$$-\varepsilon<\frac{3x+3}{2x-2}<\varepsilon$$ facendo il sistema:

$$\begin{cases}\dfrac{3x+3}{2x-2}<\varepsilon\\[2ex] \dfrac{3x+3}{2x-2}>-\varepsilon\end{cases} \quad \begin{cases}3x+3<2x\varepsilon-2\varepsilon\\ 3x+3>-2x\varepsilon+2\varepsilon\end{cases} \quad \begin{cases}3x-2x\varepsilon<-3-2\varepsilon\\ 3x+2x\varepsilon>2\varepsilon-3\end{cases}$$ cioè:

$$\begin{cases}x(3-2\varepsilon)<-3-2\varepsilon\\ x(3+2\varepsilon)>-3+2\varepsilon\end{cases} \quad \begin{cases}x<\dfrac{-3-2\varepsilon}{3-2\varepsilon} \;\to\; x<-\dfrac{3+2\varepsilon}{3-2\varepsilon} \;\to\; x<-\dfrac{3-2\varepsilon+4\varepsilon}{3-2\varepsilon}\\[2ex] x>\dfrac{-3+2\varepsilon}{3+2\varepsilon} \;\to\; x>-\dfrac{3-2\varepsilon}{3+2\varepsilon} \;\to\; x>-\dfrac{3+2\varepsilon-4\varepsilon}{3+2\varepsilon}\end{cases}$$

risulta

$$\begin{cases}x<-\dfrac{3-2\varepsilon+4\varepsilon}{3-2\varepsilon}\\[2ex] x>-\dfrac{3+2\varepsilon-4\varepsilon}{3+2\varepsilon}\end{cases} \quad \begin{cases}x<-1+\dfrac{4\varepsilon}{3-2\varepsilon}\\[2ex] x>-1-\dfrac{4\varepsilon}{3+2\varepsilon}\end{cases} \;\to\; -1-\frac{4\varepsilon}{3+2\varepsilon}<x<-1+\frac{4\varepsilon}{3-2\varepsilon}$$

dato che la soluzione è un intorno di x= -1 il limite è verificato.

Esercizio no.12:soluzione

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x-1}{2x+3}=\frac{1}{2}$$

Dalla definizione, tale limite risulta verificato se scelto arbitrariamente $\varepsilon>0$ si può determinare conseguentemente a tale scelta un numero $K>0$ tale che

per ogni $x>K$si abbia si abbia $|f(x)-l|<\varepsilon$ o ciò che è lo stesso: $l-\varepsilon<f(x)<l+\varepsilon$.

in termini simbolici:

$$\forall\varepsilon>0,\ \exists K>0:\quad x>K\quad\Rightarrow\ |f(x)-l|<\varepsilon$$

possiamo anche procedere così:

$$\left|\frac{x-1}{2x+3}-\frac{1}{2}\right|<\varepsilon\ \rightarrow\ \left|\frac{2x-2-2x-3}{2(2x+3)}\right|<\varepsilon\ \rightarrow\ \left|\frac{-5}{2(2x+3)}\right|=\frac{5}{2|2x+3|}<\varepsilon$$

$$\frac{5}{2\varepsilon}<|2x+3|\ \rightarrow\ 2x+3>\frac{5}{2\varepsilon}\ \vee\ 2x+3<-\frac{5}{2\varepsilon}$$

$$\begin{cases}2x>\dfrac{5}{2\varepsilon}-3\\ 2x<-\dfrac{5}{2\varepsilon}-3\end{cases}\qquad\begin{cases}x>\dfrac{5}{4\varepsilon}-\dfrac{3}{2}\\ x<-\dfrac{5}{4\varepsilon}-\dfrac{3}{2}\end{cases}$$

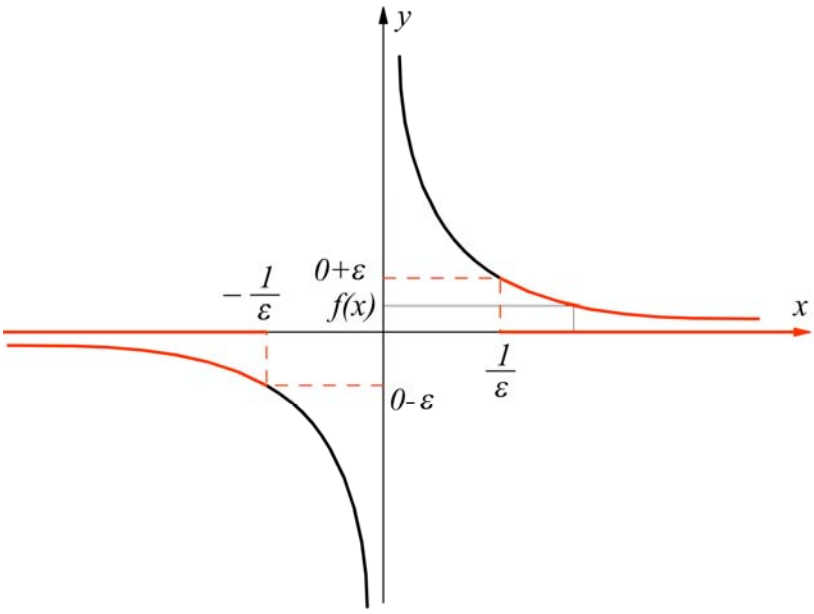
essendo e molto piccolo
$\frac{5}{4\varepsilon}$ è molto grande.
La soluzione è un intorno di ∞ e il limite è verificato

Infatti fissato un ε>0 , piccolo a piacere, abbiamo determinato un intervallo $x>\frac{5}{4\varepsilon}-\frac{3}{2}=K$

tale per cui $\forall x>K$ si ha $\left|f(x)-\frac{1}{2}\right|<\varepsilon$ come richiesto dalla definizione.

Esercizio no.13:soluzione

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0 \qquad \left|\frac{1}{x}-0\right|<\varepsilon \;\rightarrow\; \frac{1}{|x|}<\varepsilon \;\rightarrow\; \frac{1}{\varepsilon}<|x| \;\rightarrow\; x<-\frac{1}{\varepsilon} \;\vee\; x>\frac{1}{\varepsilon}$$



anche qui fissato un ε>0 , piccolo a piacere, abbiamo determinato un intervallo $x>\frac{1}{\varepsilon}=K$ tale per cui $\forall x>K$ si ha

$$|f(x)-0|<\varepsilon$$

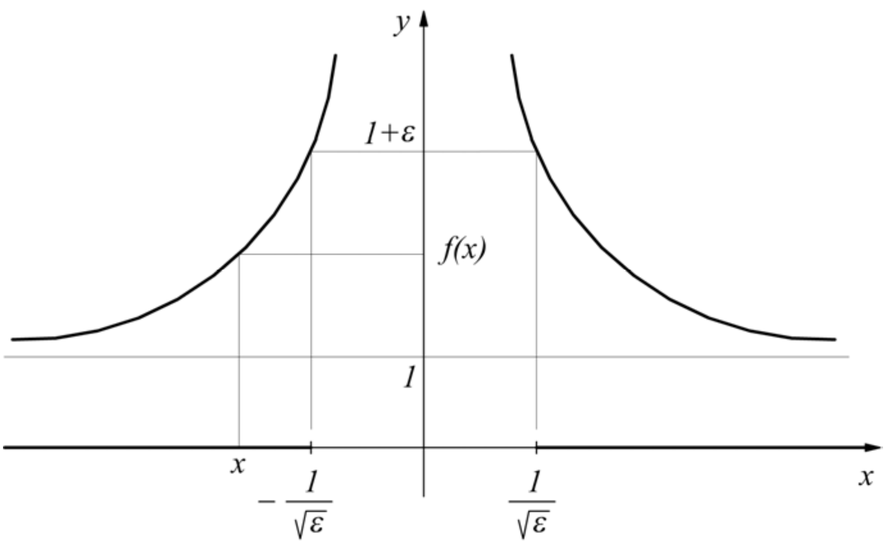
come richiesto dalla definizione.

Esercizio no.14:soluzione

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+1}{x^2}=1$$

$$\left|\frac{x^2+1}{x^2}-1\right|<\varepsilon \;\rightarrow\; \left|\frac{x^2+1-x^2}{x^2}\right|<\varepsilon \;\rightarrow\; \left|\frac{1}{x^2}\right|<\varepsilon \;\rightarrow\; \frac{1}{x^2}<\varepsilon$$ quindi:

$x^2>\frac{1}{\varepsilon} \;\rightarrow\; x<-\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \;\vee\; x>\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$ il risultato restituisce un intorno di ∞.



Esercizio no.15:soluzione

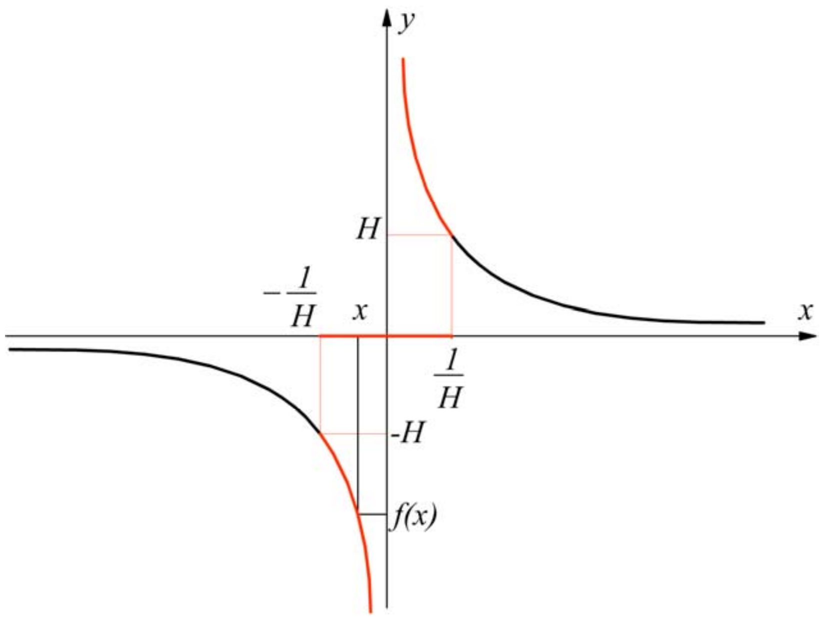
$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x} = \infty$$

La definizione dice che la funzione ha per limite $-\infty$ o $+\infty$ per $x \to x_0$ se scelto comunque un numero positivo H esiste, conseguentemente a tale scelta un altro numero positivo δ tale che per ogni $|x - x_0| < \delta$

si abbia $\begin{cases} f(x) > H & se \quad l = +\infty \\ f(x) < -H & se \quad l = -\infty \end{cases}$ $\quad \forall H > 0, \ \exists \delta > 0 : \quad |x - x_0| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x)| > H$

$\left|\frac{1}{x}\right| > H \ \rightarrow \ \frac{1}{H} > |x| \ \rightarrow \quad -\frac{1}{H} < x < \frac{1}{H}$ oppure $|x - 0| < \frac{1}{H}$

la soluzione è un intorno di x=0 e il limite è verificato



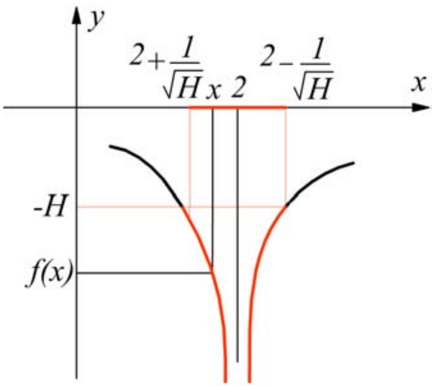
Esercizio no.16:soluzione

$$\lim_{x \to 2} \frac{1}{4x - x^2 - 4} = -\infty$$

Fissato H>0 risolviamo la disequazione:

$$\frac{1}{4x - x^2 - 4} < -H \quad \rightarrow \quad -\frac{1}{x^2 - 4x + 4} < -H \quad \rightarrow \quad -\frac{1}{(x-2)^2} < -H$$

$$\frac{1}{(x-2)^2} > H \quad \rightarrow \quad \frac{1}{H} > (x-2)^2 \quad \rightarrow \quad -\frac{1}{\sqrt{H}} < x - 2 < \frac{1}{\sqrt{H}}$$ quindi:



$$2 - \frac{1}{\sqrt{H}} < x < 2 + \frac{1}{\sqrt{H}}$$

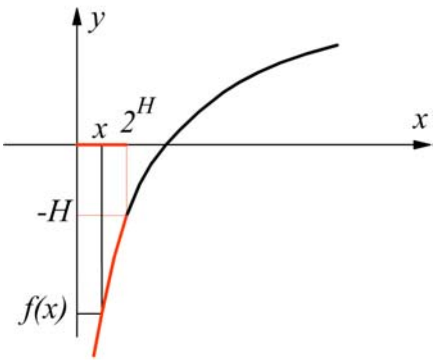
essendo il risultato un intorno completo del 2, il limite è verificato.

Esercizio no.17:soluzione

$$\lim_{x \to 0^+} lg_2\, x = -\infty$$

Fissato H>0 risolviamo la disequazione:

$lg_2\, x < -H \quad \rightarrow \quad x < 2^{-H} \quad \rightarrow \quad x < \frac{1}{2^H}$ pertanto, dato che per i logaritmi x>0 si ha



$$0 < x < \frac{1}{2^H}$$

che con H>0 grande a piacere definisce un intorno destro di x=0.

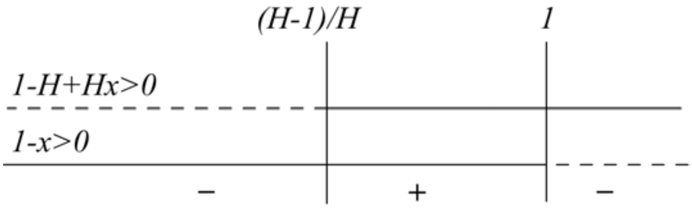
Esercizio no.18:soluzione

$$\lim_{x \to 1^-} \frac{1}{1-x} = +\infty$$

Si è detto che per $\lim_{x \to x_0} f(x) = \infty$ si deve applicare $\begin{cases} f(x) > H & se \quad l = +\infty \\ f(x) < -H & se \quad l = -\infty \end{cases}$

con H arbitrario, grande a piacere

$$\frac{1}{1-x} > H \quad \to \quad \frac{1-H+Hx}{1-x} > 0$$



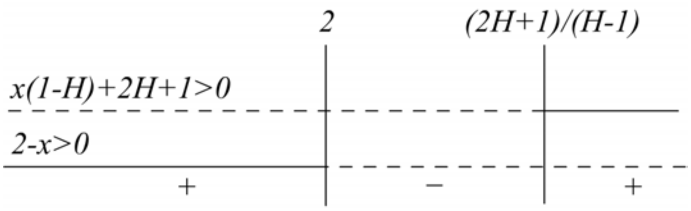
come si vede si arriva ad individuare un intorno sinistro di 1. Il limite è verificato.

Esercizio no.19:soluzione

$$\lim_{x \to 2^+} \frac{1+x}{2-x} = -\infty$$

Per $\lim_{x \to x_0} f(x) = \infty$ si deve applicare $\begin{cases} f(x) > H & se \quad l = +\infty \\ f(x) < -H & se \quad l = -\infty \end{cases}$ per cui:

$$\frac{1+x}{2-x} < -H \quad \to \quad \frac{1+x+2H-Hx}{2-x} < 0 \quad \to \quad \frac{x(1-H)+2H+1}{2-x} < 0$$ o anche:



Come si nota quest'ultima è verificata solo in un intorno destro di x=2. Il limite è verificato.

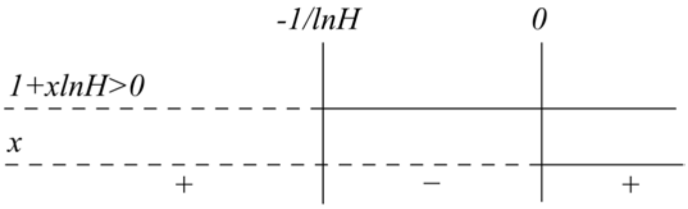
Esercizio no.20:soluzione

$$\lim_{x \to 0^-} -\frac{1}{e^{1/x}} = -\infty$$

Per $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty$ si deve applicare $\begin{cases} f(x) > H & se \quad l = +\infty \\ f(x) < -H & se \quad l = -\infty \end{cases}$ per cui:

$$-\frac{1}{e^{1/x}} < -H \quad \to \quad \frac{1}{e^{1/x}} > H \quad \to \quad \frac{1}{H} > e^{1/x} \quad \to \quad \frac{1}{x} < ln\frac{1}{H} = -ln H$$

$$\frac{1}{x} + ln H < 0 \quad \to \quad \frac{1 + x ln H}{x} < 0$$



Come si nota quest'ultima è verificata solo in un intorno sinistro di x=0.