Sistemi di disequazioni

Esercizio no.1 *Soluzione a pag.4*

$$\begin{cases} 2x-1>0 \\ 3-x<0 \end{cases} \qquad R\left[x>3\right]$$

Esercizio no.2 *Soluzione a pag.4*

$$\begin{cases} 5x\le 0 \\ 7-2x>0 \end{cases} \qquad R\left[x\le 0\right]$$

Esercizio no.3 *Soluzione a pag.4*

$$\begin{cases} \frac{3}{5}x+\frac{1}{20}-\left(1-\frac{1-x}{5}\right)<\frac{1}{5} \\ \frac{x+2}{3}+(2-x)(2+x)+\frac{1}{3}(x+3)>x(1-x)+\frac{1}{3}(x+9) \end{cases} \qquad R\left[x<\frac{19}{8}\right]$$

Esercizio no.4 *Soluzione a pag.5*

$$\begin{cases} 3-5x\le 0 \\ 3x-1<3 \end{cases} \qquad R\left[\frac{3}{5}\le x<\frac{4}{3}\right]$$

Esercizio no.5 *Soluzione a pag.5*

$$\begin{cases} 4-x+7(x-1)<2(1+x) \\ (x-1)^2-(x+2)^2>5-2(x-1) \end{cases} \qquad R\left[x<-\frac{5}{2}\right]$$

Esercizio no.6 *Soluzione a pag.5*

$$\begin{cases} \frac{1}{5}x+\frac{x-4}{3}<x+\frac{1}{5} \\ (x-1)^2+3(x-1)<(x+2)(x-2) \end{cases} \qquad R\left[-\frac{23}{7}<x<-2\right]$$

Esercizio no.7 *Soluzione a pag.6*

$$\begin{cases} 2x-10<0 \\ \frac{x+3}{x-2}>0 \end{cases} \qquad R\left[x<3 \vee \ 2<x<5\right]$$

Esercizio no.8 *Soluzione a pag.7*

$$\begin{cases} \dfrac{1-x}{3} < \dfrac{1+x}{2} \\ \dfrac{x-1}{5-x} < 0 \end{cases}$$

$$R\left[-\frac{1}{5} < x < 1 \quad \vee \quad x > 5\right]$$

Esercizio no.9 *Soluzione a pag.7*

$$\begin{cases} \dfrac{x+1}{3} < \dfrac{x+4}{4} \\ \dfrac{7}{x+5} \geq \dfrac{2}{3} \end{cases}$$

$$R\left[x \leq \frac{11}{2}\right]$$

Esercizio no.10 *Soluzione a pag.8*

$$\begin{cases} \dfrac{x-1}{5-x} \geq 0 \\ \dfrac{x}{x-1} > 0 \end{cases}$$

$$R\left[1 < x < 5\right]$$

Esercizio no.11 *Soluzione a pag.9*

$$\begin{cases} x-4 > 1 \\ x^2 - 3x + 2 > 0 \end{cases}$$

$$R\left[x > 5\right]$$

Esercizio no.12 *Soluzione a pag.10*

$$\begin{cases} 4x^2 - 4x < 3 \\ (x+5)(x-5) < 0 \end{cases}$$

$$R\left[-\frac{1}{2} < x < \frac{3}{2}\right]$$

Esercizio no.13 *Soluzione a pag.11*

$$\begin{cases} (x-3)(x-4) \geq 0 \\ x-2 < 8 \end{cases}$$

$$R\left[x < 3 \quad \vee \quad 4 < x < 10\right]$$

Esercizio no.14 *Soluzione a pag.11*

$$\begin{cases} 3x + 2 \geq 0 \\ x^2(2x-1) < 0 \end{cases}$$

$$R\left[-\frac{2}{3} \leq x < \frac{1}{2} \quad (x \neq 0)\right]$$

Esercizio no.15 *Soluzione a pag.12*

$$\begin{cases} 3x^2 - 4x < 7 \\ \dfrac{4x-6}{3} < 1 \end{cases}$$

$$R\left[-1 < x < \frac{9}{4}\right]$$

Esercizio no.16 *Soluzione a pag.12*

$$\begin{cases} 3x^2 - x + 5 < 0 \\ \dfrac{x+2}{3} > x + \dfrac{x-1}{4} \end{cases}$$

$$R\,[impossibile]$$

Esercizio no.17 *Soluzione a pag.13*

$$\begin{cases} (x+1)^2 - 2(x-2) \leq 3(x+1)(x-1) \\ 2x(x-3) + (x+2)^2 > 4 \end{cases}$$

$$R\,[x \leq -2 \quad \vee \quad x \geq 2]$$

Esercizio no.18 *Soluzione a pag.14*

$$\begin{cases} \dfrac{x^2+1}{x} > 0 \\ \dfrac{3}{1-x} > 0 \end{cases}$$

$$R\,[0 < x < 1]$$

Esercizio no.19 *Soluzione a pag.14*

$$\begin{cases} 3 - x > 2 \\ x < 4 - x \\ x^2 > 1 \end{cases}$$

$$R\,[x < -1]$$

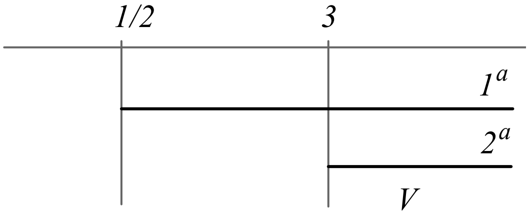
Esercizio no.20 *Soluzione a pag.14*

$$\begin{cases} 1 + x \geq 0 \\ x^2 > 0 \\ x + 2 < 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x \geq -1 \\ x^2 \neq 0 \\ x < -2 \end{cases}$$

$$R\,[impossibile]$$

Esercizio no.1:soluzione

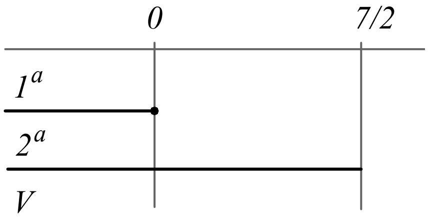
$$\begin{cases} 2x-1>0 \\ 3-x<0 \end{cases} \quad \begin{cases} x>\frac{1}{2} \\ x>3 \end{cases}$$



Le due disequazioni sono simultaneamente verificate per $x>3$.

Esercizio no.2:soluzione

$$\begin{cases} 5x\le 0 \\ 7-2x>0 \end{cases} \quad \begin{cases} x\le 0 \\ x<\frac{7}{2} \end{cases}$$



Le due disequazioni sono simultaneamente verificate per $\forall x\le 0$.

Esercizio no.3:soluzione

Sviluppando la $\frac{3}{5}x+\frac{1}{20}-\left(1-\frac{1-x}{5}\right)<\frac{1}{5}$ otteniamo

$$\frac{3}{5}x+\frac{1}{20}-1+\frac{1-x}{5}<\frac{1}{5} \quad\rightarrow\quad \frac{3}{5}x+\frac{1}{20}-1+\frac{1}{5}-\frac{x}{5}<\frac{1}{5}$$

$$\frac{(3-1)x}{5}+\frac{1-20+4}{20}<\frac{1}{5} \quad\rightarrow\quad \frac{2}{5}x-\frac{15}{20}<\frac{1}{5} \quad\rightarrow\quad \frac{2}{5}x<\frac{1}{5}+\frac{15}{20}$$

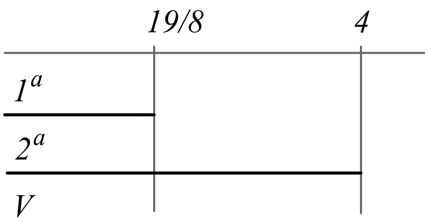
$$\frac{2}{5}x<\frac{4+15}{20} \quad\rightarrow\quad \frac{2}{\cancel{5}}x<\frac{19}{\cancel{20}_{4}} \quad\rightarrow\quad 2x<\frac{19}{4} \quad\rightarrow\quad x<\frac{19}{8}$$

Sviluppando la $\frac{x+2}{3}+(2-x)(2+x)+\frac{1}{3}(x+3)>x(1-x)+\frac{1}{3}(x+9)$ otteniamo

$$\frac{x+2}{3}+4-x^2+\frac{1}{3}x+1>x-x^2+\frac{x}{3}+3$$

$$\frac{x}{3}+\frac{2}{3}+4-\cancel{x^2}+\cancel{\frac{x}{3}}+1>x-\cancel{x^2}+\cancel{\frac{x}{3}}+3$$

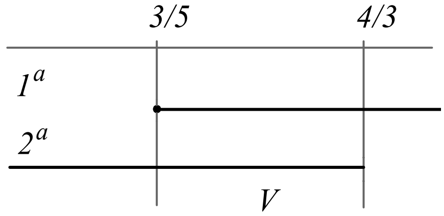
$$\frac{2}{3}+4+1-3>x-\frac{x}{3} \quad\rightarrow\quad \frac{2}{3}+2>\frac{2}{3}x \quad\rightarrow\quad {}^{4}\frac{\cancel{8}}{\cancel{3}}>\frac{\cancel{2}}{\cancel{3}}x \quad\rightarrow\quad x<4$$



Le due disequazioni sono simultaneamente verificate per $x<\frac{19}{8}$; tale intervallo. costituisce quindi, la soluzione del sistema assegnato.

Esercizio no.4:soluzione

$$\begin{cases} 3-5x \le 0 \\ 3x-1<3 \end{cases} \quad \begin{cases} x \ge \dfrac{3}{5} \\ 3x<4 \end{cases} \quad \begin{cases} x \ge \dfrac{3}{5} \\ 3x<\dfrac{4}{3} \end{cases}$$

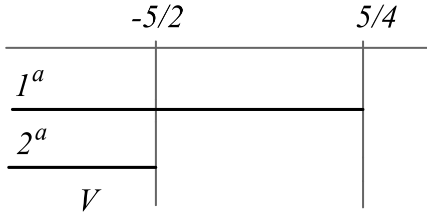


Il sistema ha soluzione per $\dfrac{3}{5} \le x < \dfrac{4}{3}$

Esercizio no.5:soluzione

$$\begin{cases} 4-x+7(x-1)<2(1+x) \\ (x-1)^2-(x+2)^2>5-2(x-1) \end{cases} \quad \begin{cases} 4-x+7x-7<2+2x \\ \cancel{x^2}-\cancel{2x}+1-\cancel{x^2}-4x-4>5-\cancel{2x}+2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 7x-x-2x<2-4+7 \\ 1-4-5-2>4x \end{cases} \quad \begin{cases} 4x<5 \\ -10>4x \end{cases} \quad \begin{cases} x<5/4 \\ x<-5/2 \end{cases}$$



Il sistema è, pertanto, soddisfatto per

$$x<-\frac{5}{2}$$

Esercizio no.6:soluzione

$$\begin{cases} \dfrac{1}{5}x+\dfrac{x-4}{3}<x+\dfrac{1}{5} \\ (x-1)^2+3(x-1)<(x+2)(x-2) \end{cases}$$

Sviluppando la

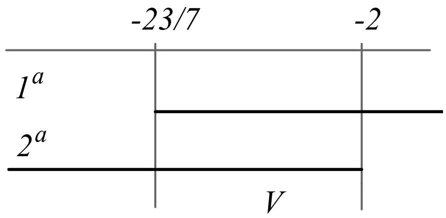
$\dfrac{1}{5}x+\dfrac{x-4}{3}<x+\dfrac{1}{5}$ otteniamo:

$$\frac{x}{5}+\frac{x}{3}-\frac{4}{3}<x+\frac{1}{5} \;\rightarrow\; \frac{x}{5}+\frac{x}{3}-x<\frac{4}{3}+\frac{1}{5} \;\rightarrow\; \frac{3x+5x-15x}{15}<\frac{20+3}{15}$$

$$-\frac{7}{\cancel{15}}x<\frac{23}{\cancel{15}} \;\rightarrow\; 7x>-23 \;\rightarrow\; x>-\frac{23}{7}$$

Sviluppando la $(x-1)^2+3(x-1)<(x+2)(x-2)$ otteniamo:

$$\cancel{x^2}-2x+1+3x-3<\cancel{x^2}-4 \;\rightarrow\; x<-4-1+3 \;\rightarrow\; x<-2$$



Il sistema risulta verificato per:

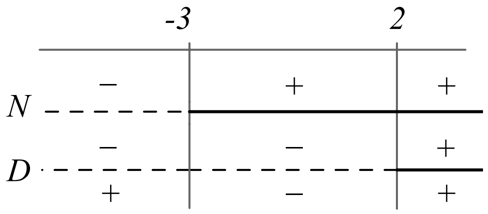
$$-\frac{23}{7}<x<-2$$

Esercizio no.7:soluzione

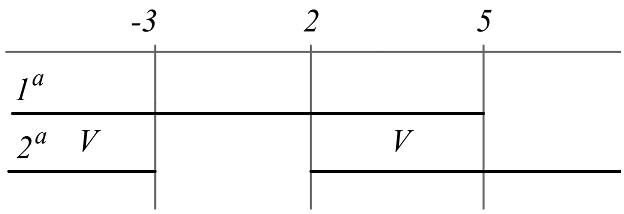
$$\begin{cases} 2x-10<0 \quad \rightarrow \quad 2x<10 \quad \rightarrow \quad x<\dfrac{10}{2} \quad \rightarrow \quad x<5 \\ \dfrac{x+3}{x-2}>0 \end{cases}$$

Per la seconda disequazione, dobbiamo applicare il metodo per le disequazioni frazionarie e valutare il segno del rapporto.

$$\frac{x+3}{x-2}>0 \quad \rightarrow \quad \begin{cases} N>0 \;\; x+3>0 \\ D>0 \;\; x-2>0 \end{cases} \quad \begin{cases} x>-3 \\ x>2 \end{cases}$$



La seconda disequazione è soddisfatta per $x<-3 \;\vee\; x>2$



L'intero sistema è, dunque, verificato per

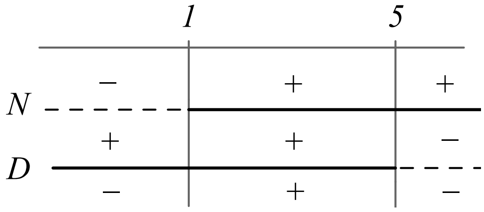
$x<-3 \;\vee\; 2<x<5$

Esercizio no.8:soluzione

$$\begin{cases} \dfrac{1-x}{3} < \dfrac{1+x}{2} \rightarrow 2(1-x) < 3(1+x) \rightarrow 2-2x < 3+3x \rightarrow -1 < 5x \rightarrow \quad x > -\dfrac{1}{5} \\ \dfrac{x-1}{5-x} < 0 \end{cases}$$

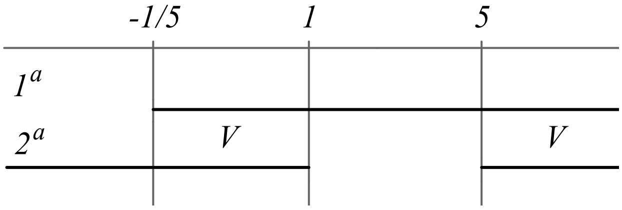
Per la seconda disequazione, dobbiamo applicare il metodo per le disequazioni frazionarie e valutare il segno del rapporto.

$$\frac{x-1}{5-x} < 0 \quad \rightarrow \quad \begin{cases} N > 0 \;\; x-1 > 0 \\ D > 0 \;\; 5-x > 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x > 1 \\ x < 5 \end{cases}$$



La seconda disequazione è soddisfatta (è negativa) per

$$x < 1 \;\vee\; x > 5$$

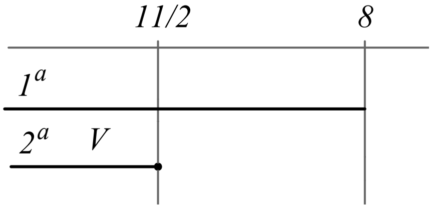


L'intero sistema è, dunque, verificato per

$$-\frac{1}{5} < x < 1 \quad \vee \quad x > 5$$

Esercizio no.9:soluzione

$$\begin{cases} \dfrac{x+1}{3} < \dfrac{x+4}{4} \\ \dfrac{7}{x+5} \geq \dfrac{2}{3} \end{cases} \quad \begin{cases} 4(x+1) < 3(x+4) \\ 21 \geq 2(x+5) \end{cases} \quad \begin{cases} 4x+4 < 3x+12 \\ 21 \geq 2x+10 \end{cases} \quad \begin{cases} x < 8 \\ 11 \geq 2x \quad \rightarrow \quad x \leq \dfrac{11}{2} \end{cases}$$



L'intero sistema è verificato per

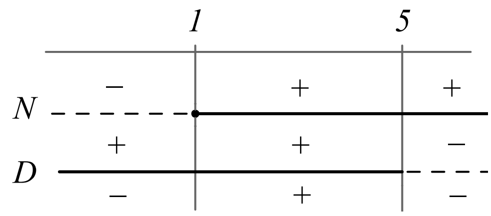
$$x \leq \frac{11}{2}$$

Esercizio no.10:soluzione

$$\begin{cases} \dfrac{x-1}{5-x} \geq 0 \\ \dfrac{x}{x-1} > 0 \end{cases}$$

Per la prima componente il sistema:

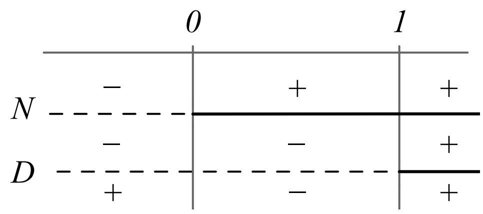
$$\frac{x-1}{5-x} \geq 0 \;\rightarrow\; \begin{cases} N > 0 & x-1>0 & \rightarrow & x>1 \\ D > 0 & 5-x>0 & \rightarrow & x<5 \end{cases}$$



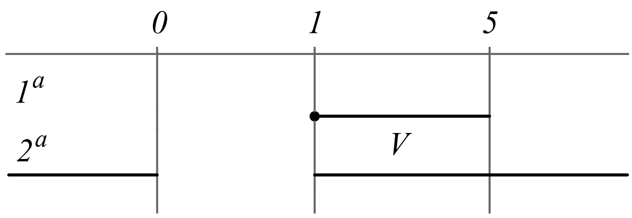
soddisfatta per $1 \leq x < 5$ (dobbiamo includere anche 1, perché annulla il numeratore e la frazione)

Per la seconda componente il sistema:

$$\frac{x}{x-1} > 0 \;\rightarrow\; \begin{cases} N > 0 & x>0 & & \\ D > 0 & x-1>0 & \rightarrow & x>1 \end{cases}$$



soddisfatta per $x < 0 \;\vee\; x > 1$



per il sistema la soluzione è $1 < x < 5$

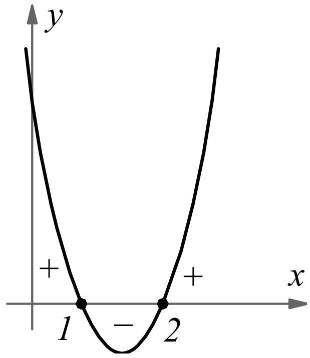
(dobbiamo non includere 1, perché soddisfa solo la 1ª disequazione)

Esercizio no.11:soluzione

$$\begin{cases} x-4>1 \\ x^2-3x+2>0 \end{cases} \quad \begin{cases} x>1+4 \\ x^2-3x+2>0 \end{cases} \quad \rightarrow \quad x>5$$

Per la seconda disequazione, applichiamo la formula del trinomio, per calcolarne le radici:

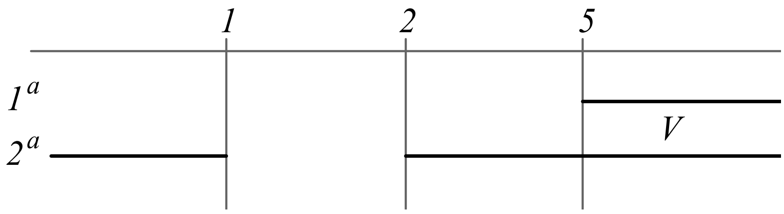
$$x_{1/2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{3\pm\sqrt{9-8}}{2}=\begin{cases} \dfrac{3+1}{2}=\dfrac{4}{2}=2 \\ \dfrac{3-1}{2}=\dfrac{2}{2}=1 \end{cases}$$



come si vede dal disegno, è verificata per $x<1 \ \vee \ x>2$

l'intero sistema è verificato per

$x>5$

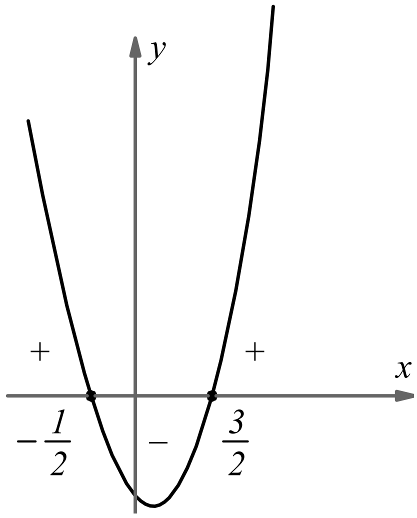


Esercizio no.12:soluzione

$$\begin{cases} 4x^2 - 4x < 3 \\ (x+5)(x-5) < 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 4x^2 - 4x - 3 < 0 \\ x^2 - 25 < 0 \end{cases}$$

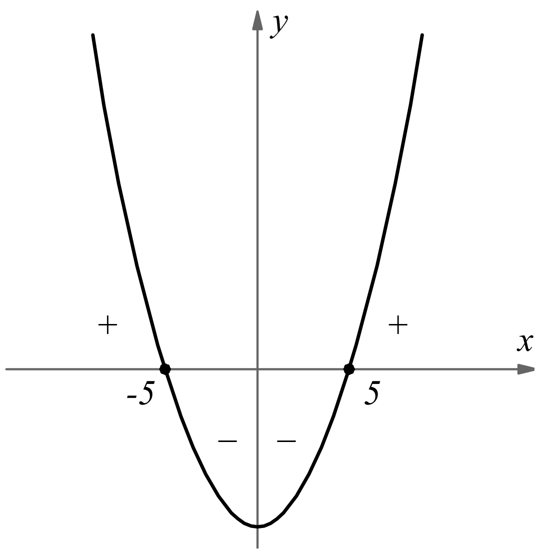
Per la prima, le radici sono:

$$x_{1/2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{4 \pm \sqrt{16+48}}{8} = \begin{cases} \dfrac{4+8}{8} = \dfrac{12}{8} = \dfrac{3}{2} \\ \dfrac{4-8}{8} = -\dfrac{4}{8} = -\dfrac{1}{2} \end{cases}$$



il trinomio è associabile ad una parabola con la concavità rivolta verso l'alto è positiva per:

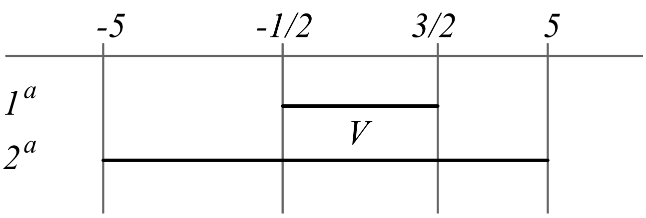
$$x < -\frac{1}{2} \ \vee \ x > \frac{3}{2}$$



per la seconda ricordiamo che $y = x^2 - 25$ è una parabola con concavità rivolta verso l'alto che intercetta l'asse delle ascisse in $x = \pm 5$

la seconda disequazione è soddisfatta per

$$x < -5 \ \vee \ x > 5$$

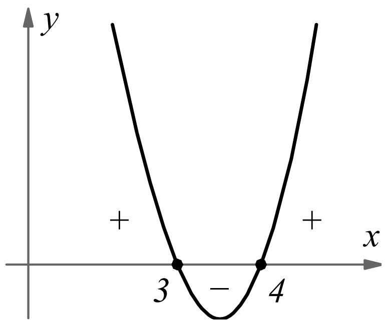


L'intero sistema è verificato per

$$-\frac{1}{2} < x < \frac{3}{2}$$

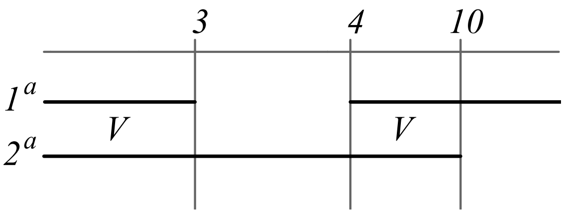
Esercizio no.13:soluzione

$$\begin{cases} (x-3)(x-4) \geq 0 \\ x-2 < 8 \end{cases}$$



La prima è associata ad una parabola positiva per $x < 3 \;\vee\; x > 4$.

La seconda è soddisfatta per $x < 8+2 \;\rightarrow\; x < 10$.



Il sistema è verificato per

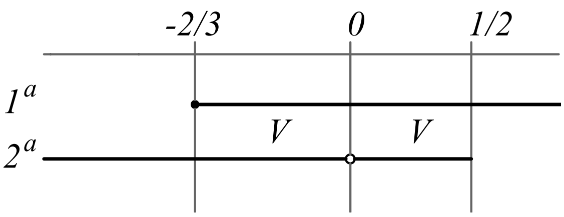
$x < 3 \;\vee\; 4 < x < 10$

Esercizio no.14:soluzione

$$\begin{cases} 3x+2 \geq 0 & \rightarrow \quad x \geq -\dfrac{2}{3} \\ x^2(2x-1) < 0 \end{cases}$$

Per la seconda osserviamo che $x^2 \geq 0$ dobbiamo escludere $x = 0$ perché non soddisfa la disequazione.

$2x-1 < 0 \;\rightarrow\; x < \dfrac{1}{2}$



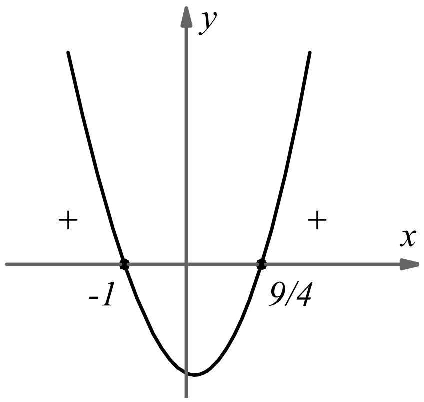
Il sistema è verificato per $-\dfrac{2}{3} \leq x < \dfrac{1}{2}$ con $x \neq 0$

Esercizio no.15:soluzione

$$\begin{cases} 3x^2 - 4x < 7 \\ \dfrac{4x-6}{3} < 1 \end{cases} \quad \begin{cases} 3x^2 - 4x - 7 < 0 \\ 4x - 6 < 3 \end{cases} \quad \rightarrow \quad 4x < 9 \quad \rightarrow \quad x < \frac{4}{9}$$

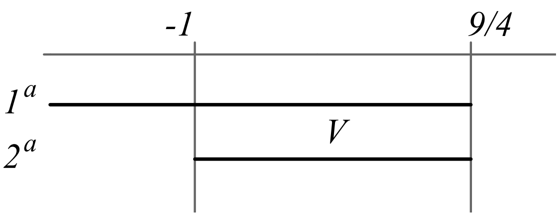
La prima delle due disequazioni, prevede le seguenti radici:

$$x_{1/2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{4 \pm \sqrt{16+84}}{6} = \begin{cases} \dfrac{4+10}{6} = \dfrac{14}{6} = \dfrac{7}{3} \\ \dfrac{4-10}{6} = -\dfrac{6}{6} = -1 \end{cases}$$



è una parabola con concavità rivolta verso l'alto

positiva per $x < -1 \ \vee \ x > \dfrac{9}{4}$



L'intero sistema è risolto per

$$-1 < x < \frac{9}{4}$$

Esercizio no.16:soluzione

$$\begin{cases} 3x^2 - x + 5 < 0 \\ \dfrac{x+2}{3} > x + \dfrac{x-1}{4} \end{cases}$$

La prima è associabile ad una parabola con concavità rivolta verso l'alto, ma è priva di radici in campo reale dato che $\Delta = b^2 - 4ac = 1 - 4 \cdot 3 \cdot 5 = 1 - 60 < 0$.

La prima disequazione non è mai verificata, quindi l'intero sistema non è mai verificato.
Il sistema si dice impossibile.

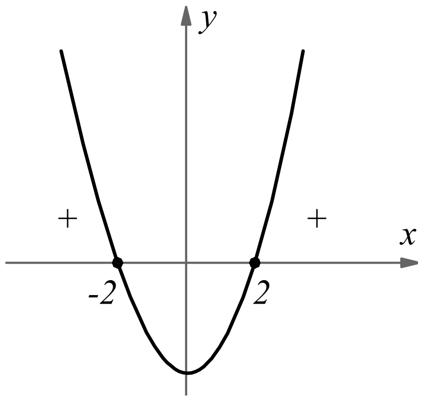
Esercizio no.17:soluzione

$$\begin{cases} (x+1)^2 - 2(x-2) \le 3(x+1)(x-1) \\ 2x(x-3)+(x+2)^2 > 4 \end{cases}$$

Per la prima abbiamo:

$$x^2 + \cancel{2x} + 1 - \cancel{2x} + 4 \le 3(x^2 - 1) \rightarrow \quad x^2 + 5 \le 3x^2 - 3 \rightarrow \quad 2x^2 - 8 \ge 0$$

dividendo primo e secondo membro per 2:



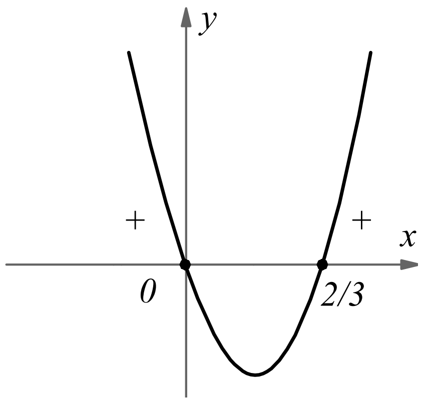
$$x^2 - 4 \ge 0$$

Parabola con concavità rivolta verso l’alto

positiva o uguale a 0 per $x \le 2 \quad \vee \quad x \ge 2$

per la seconda disequazione:

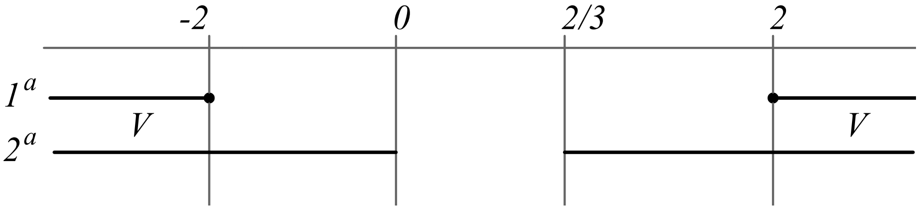
$$2x(x-3)+(x+2)^2 > 4 \quad \rightarrow \quad 2x^2 - 6 + x^2 + 4x + \cancel{4} > \cancel{4}$$



$$3x^2 - 2x > 0 \quad \rightarrow \quad x(3x-2) > 0$$

Si tratta di una parabola con concavità rivolta verso l’alto, positiva per

$$x < 0 \quad \vee \quad x > \frac{2}{3}$$



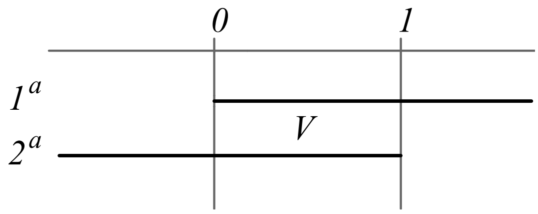
Intero sistema verificato per $x \le -2 \quad \vee \quad x \ge 2$

Esercizio no.18:soluzione

$$\begin{cases} \dfrac{x^2+1}{x} > 0 \\ \dfrac{3}{1-x} > 0 \end{cases}$$

per la prima, in numeratore $x^2+1>0 \quad \forall x$
quindi la disequazione è soddisfatta per $x>0$

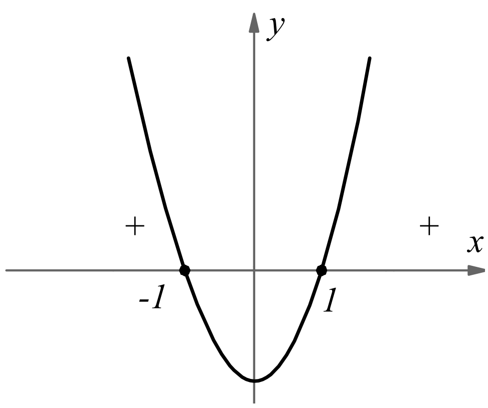
per la seconda è sufficiente che il denominatore $1-x>0 \quad \rightarrow \quad x<1$



Il sistema è verificato per $0<x<1$

Esercizio no.19:soluzione

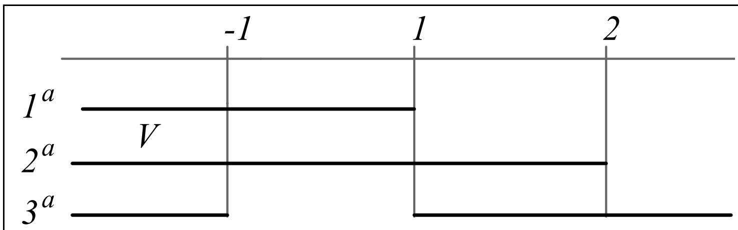
$$\begin{cases} 3-x>2 \\ x<4-x \\ x^2>1 \end{cases} \qquad \begin{cases} x<1 \\ 2x<4 \quad \rightarrow \quad x<2 \\ x^2>1 \end{cases}$$



L'ultima disequazione si può esprimere come
$x^2-1>0$:

è come chiedersi, per quale valore di x
tale parabola si trova nel semipiano superiore.

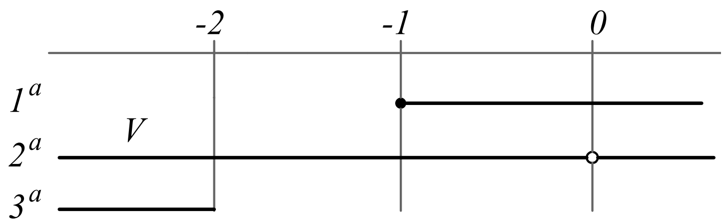
ovviamente per $x<-1 \ \vee \ x>1$



Le tre disequazioni. sono simultaneamente verificate per $x<-1$

Esercizio no.20:soluzione

$$\begin{cases} 1+x\ge 0 \\ x^2>0 \\ x+2<0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x\ge -1 \\ x^2\ne 0 \\ x<-2 \end{cases}$$



Le tre disequazioni non sono mai contemporaneamente soddisfatte: il sistema è impossibile.