Esercizio no.1 *Soluzione a pag.5*

$\sqrt{x+4} < 4$ $R\ (\ -3 \leq x < 13\ )$

Esercizio no.2 *Soluzione a pag.5*

$\sqrt{2x+1} > 3$ $R\ (\ x > 4\ )$

Esercizio no.3 *Soluzione a pag.5*

$\sqrt{x-2} + 2 > 0$ $R\ (\ x \geq 2\ )$

Esercizio no.4 *Soluzione a pag.5*

$\sqrt{3x-2} > -2$ $R\left(x \geq \frac{2}{3}\right)$

Esercizio no.5 *Soluzione a pag.6*

$\sqrt{x+2} \geq 1$ $R(\ x \geq -1\ )$

Esercizio no.6 *Soluzione a pag.6*

$\sqrt{3+2x} > 1$ $R\left(x \geq -\frac{3}{2}\right)$

Esercizio no.7 *Soluzione a pag.6*

$\sqrt{x-1} < \frac{1}{4}$ $R\left(\ 1 \leq x < \frac{17}{16}\ \right)$

Esercizio no.8 *Soluzione a pag.6*

$\sqrt{1-x} < 1$ $R(\ 0 < x \leq 1\ )$

Esercizio no.9 *Soluzione a pag.7*

$\sqrt{x^2-9} > -3$ $R\ (x \leq -3 \vee x \geq 3\ )$

Esercizio no.10 *Soluzione a pag.7*

$\sqrt{x^2-4} < -3$ $R\ (impossibile)$

Esercizio no.11 *Soluzione a pag.7*

$$\sqrt{x^2+x+25}<4$$ $R\ (impossibile)$

Esercizio no.12 *Soluzione a pag.8*

$$\sqrt{x^3-x}+4<0$$ $R\ (impossibile)$

Esercizio no.13 *Soluzione a pag.8*

$$\sqrt{2-3x}+3>0$$ $R\left(x\leq\frac{2}{3}\right)$

Esercizio no.14 *Soluzione a pag.8*

$$\sqrt{2-x}<1$$ $R\ (\ 1<x\leq 2\ )$

Esercizio no.15 *Soluzione a pag.8*

$$\sqrt[3]{2-x}<1$$ $R\ (\ x>1\ )$

Esercizio no.16 *Soluzione a pag.8*

$$\sqrt{x^2-5x}+1>\frac{1}{2}$$ $R\ (x\leq 0\ \vee\ x\geq 5\ )$

Esercizio no.17 *Soluzione a pag.9*

$$\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}>2$$ $R\left(-\frac{5}{3}<x<-1\right)$

Esercizio no.18 *Soluzione a pag.10*

$$\sqrt{\frac{x-2}{x-1}}>2$$ $R\left(\frac{2}{3}<x<1\right)$

Esercizio no.19 *Soluzione a pag.11*

$$\sqrt{\frac{x-3}{x-4}}<1$$ $R(\ x\leq 3\ )$

Esercizio no.20 *Soluzione a pag.11*

$$\frac{1}{\sqrt{x-2}}>-\frac{1}{2}$$ $R(\ x>2\ )$

Esercizio no.21 *Soluzione a pag.11*

$\sqrt{3x+5}<0$ $R\ (impossibile)$

Esercizio no.22 *Soluzione a pag.12*

$\sqrt[3]{x+3}>-1$ $R\ (x>-4)$

Esercizio no.23 *Soluzione a pag.12*

$\sqrt{2-3x}>\sqrt{4x-1}$ $R\ \left(\frac{1}{4}\leq x<\frac{3}{7}\right)$

Esercizio no.24 *Soluzione a pag.12*

$\sqrt{\frac{1+x^2}{x^2-1}}<1$ $R\ (impossibile)$

Esercizio no.25 *Soluzione a pag.13*

$\sqrt{4x-1}<\sqrt{2-x}$ $R\ \left(\frac{1}{4}\leq x<\frac{3}{5}\right)$

Esercizio no.26 *Soluzione a pag.13*

$\sqrt{3-2x}<\sqrt{3+2x}$ $R\ \left(0<x\leq\frac{3}{2}\right)$

Esercizio no.27 *Soluzione a pag.14*

$\sqrt[3]{1+x}<\sqrt{1-x}$ $R\ (x<0)$

Esercizio no.28 *Soluzione a pag.15*

$\sqrt{x^2-4}>x+1$ $R\ (x\leq 2)$

Esercizio no.29 *Soluzione a pag.16*

$x+4\geq\sqrt{x^2-4}$ $R\ \left(-\frac{5}{2}\leq x\leq -2 \quad \vee \quad x\geq 2\right)$

Esercizio no.30 *Soluzione a pag.17*

$x-1<\sqrt{25-x^2}$ $R\ (-5\leq x<4)$

Esercizio no.31 *Soluzione a pag.18*

$$x+5<\sqrt{x^2-1}$$ $$R\left(x<-\frac{13}{5}\right)$$

Esercizio no.32 *Soluzione a pag.18*

$$\sqrt{x^2-5x}>2x$$ $$R\,(x<0)$$

Esercizio no.33 *Soluzione a pag.19*

$$\sqrt{2x-x^2}>x$$ $$R\,(0<x<1)$$

Esercizio no.34 *Soluzione a pag.20*

$$\sqrt{(x-2)^2-x}-x+3<0$$ $$R\,(4\leq x<5)$$

Esercizio no.35 *Soluzione a pag.21*

$$x+6>\sqrt{4x-x^2}$$ $$R\,(0\leq x\leq 4)$$

Esercizio no.36 *Soluzione a pag.22*

$$\sqrt{2x^2-x-1}<x-1$$ $$R\,(impossibile)$$

Esercizio no.37 *Soluzione a pag.23*

$$\sqrt{x^2-4x+3}<5-x$$ $$R\left(x<1\ \vee\ 3<x<\frac{11}{3}\right)$$

Esercizio no.38 *Soluzione a pag.24*

$$\sqrt{5+x}>\sqrt{x}+\sqrt{5-x}$$ $$R\ (4<x\leq 5)$$

Esercizio no.39 *Soluzione a pag.25*

$$\sqrt{3x+1}>9-\sqrt{3x+10}$$ $$R\,(x>5)$$

Esercizio no.40 *Soluzione a pag.25*

$$\sqrt[3]{x^3-1}<\sqrt{x^2+1}$$ $$R\ (\ \forall x\in\Re\ )$$

Esercizio no.1:soluzione

$\sqrt{x+4} < 4$ è nella forma $\sqrt[p]{A(x)} < B(x)$ per cui: $\begin{cases} A(x) \geq 0 \\ B(x) > 0 \\ A(x) < B^p(x) \end{cases}$

La condizione $B(x) > 0$ è sempre verificata.

$\begin{cases} x+3 \geq 0 \\ x+3 < 4^2 \end{cases}$ $\begin{cases} x \geq -3 \\ x+3 < 16 \end{cases}$ $\begin{cases} x \geq -3 \\ x < 13 \end{cases}$

$R \ (\ -3 \leq x < 13 \ )$

Esercizio no.2:soluzione

$\sqrt{2x+1} > 3$ è nella forma $\sqrt[p]{A(x)} > B(x)$ per cui: $\begin{cases} B(x) \geq 0 \\ A(x) > [B(x)]^p \end{cases}$

dato che la prima disequazione del sistema è sempre verificata, controlliamo la seconda.

$2x+1 > 3^2 \ \rightarrow \ 2x+1 > 9 \ \rightarrow \ x > \frac{8}{2} \ \rightarrow x > 4$ che è la soluzione.

Esercizio no.3:soluzione

$\sqrt{x-2} + 2 > 0$ equivale a $\sqrt{x-2} > -2$

la condizione di esistenza del radicale è $x-2 \geq 0 \ \rightarrow \ x \geq 2$

per tale intervallo la disequazione è certamente verificata dato che $\sqrt{x-2} \geq 0$

Esercizio no.4:soluzione

$\sqrt{3x-2} > -2$ eseguendola come nel caso precedente:

$3x-2 \geq 0 \ \rightarrow \ x \geq \frac{2}{3}$ questo intervallo verifica certamente la disequazione assegnata dato che

per tali valori $\sqrt{3x-2} \geq 0$. La soluzione è dunque: $x \geq \frac{2}{3}$

Esercizio no.5:soluzione

$\sqrt{x+2} \geq 1$ dobbiamo verificare $\begin{cases} B(x) \geq 0 \\ A(x) > [B(x)]^p \end{cases}$

la prima disequazione è sempre vera, la seconda è verificata se $x+2 \geq 1^2 \rightarrow x \geq -1$
che è la soluzione della disequazione.

Esercizio no.6:soluzione

$\sqrt{3+2x} > 1$ come nel caso precedente $\begin{cases} B(x) \geq 0 \\ A(x) > [B(x)]^p \end{cases}$ dobbiamo verificare solo:

$3+2x > 1^2 \rightarrow 2x > 1-3 \rightarrow 2x > -2 \quad x > -1$

se viene verificata questa condizione, è certamente verificata la condizione di esistenza del radicale: $x \geq -\dfrac{3}{2}$.

Esercizio no.7:soluzione

$\sqrt{x-1} < \dfrac{1}{4}$ è nella forma $\sqrt[p]{A(x)} < B(x)$ per cui: $\begin{cases} A(x) \geq 0 \\ B(x) > 0 \\ A(x) < B^p(x) \end{cases}$

La condizione $B(x) > 0$ è sempre verificata, per cui:

$$\begin{cases} x-1 \geq 0 \\ x-1 < \dfrac{1}{16} \end{cases} \quad \begin{cases} x \geq 1 \\ x < 1 + \dfrac{1}{16} \end{cases} \quad \begin{cases} x \geq 1 \\ x < \dfrac{17}{16} \end{cases} \qquad R \left(1 \leq x < \dfrac{17}{16} \right)$$

Esercizio no.8:soluzione

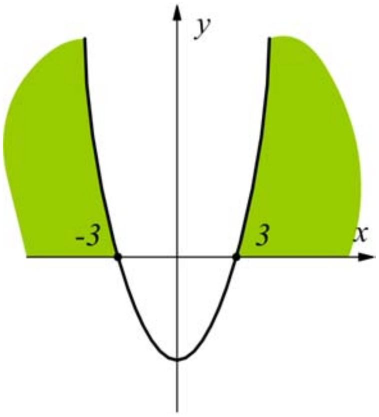
$\sqrt{1-x} < 1$ è nella forma $\sqrt[p]{A(x)} < B(x)$ con $B(x) > 0$ per cui

$$\begin{cases} 1-x \geq 0 \\ 1-x < 1 \end{cases} \quad \begin{cases} x \leq 1 \\ x > 0 \end{cases}$$

per cui la soluzione è : $0 < x \leq 1$.

Esercizio no.9:soluzione

$\sqrt{x^2-9} > -3$ se viene verificata la condizione di esistenza $x^2-9 \geq 0$ la disequazione è sicuramente soddisfatta, visto che risulterà $\sqrt{x^2-9} \geq 0$



Essendo la funzione $y = x^2 - 9$ una parabola con concavità rivolta verso l'alto, avente radici in $x = \pm 3$

È positiva per i valori esterni a tali radici:

$x \leq -3 \ \vee \ x \geq 3$

come si vede dalla figura.

Esercizio no.10:soluzione

$\sqrt{x^2-4} < -3$ è nella forma $\sqrt[p]{A(x)} < B(x)$ per cui: $\begin{cases} A(x) \geq 0 \\ B(x) > 0 \\ A(x) < B^p(x) \end{cases}$

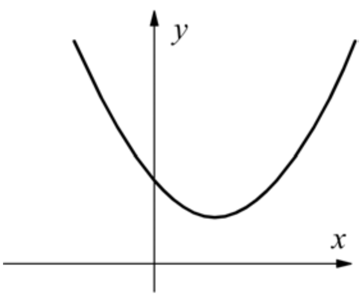
ma la seconda disequazione del sistema non è mai verificata: la disequazione è dunque impossibile.
Avremmo potuto notare che ca condizione di esistenza del radicale è:

$x^2 - 4 \geq 0$ implica $\sqrt{x^2-4} \geq 0$ che non verifica mai la disequazione di partenza.

Esercizio no.11:soluzione

$\sqrt{x^2+x+25} < 4$ è nella forma $\sqrt[p]{A(x)} < B(x)$ per cui: $\begin{cases} A(x) \geq 0 \\ B(x) > 0 \\ A(x) < B^p(x) \end{cases}$

La condizione $B(x) > 0$ è sempre verificata.
Rimane da verificare: $\begin{cases} x^2+x+25 \geq 0 \\ x^2+x+25 < 16 \end{cases}$



la funzione $y = x^2 + x + 25$ è un trinomio di II° grado con $\Delta = b^2 - 4ac = 1 - 4 \cdot 25 < 0$

non sono previste intersezioni con l'asse reale; si tratta di una parabola totalmente collocata sul semipiano positivo.
La condizione $x^2 + x + 25 \geq 0$ è sempre verificata.

resta da controllare la: $x^2 + x + 25 < 16 \ \rightarrow \ x^2 + x + 9 < 0$ cha ha un $\Delta = b^2 - 4ac = 1 - 36 < 0$: anche essa è una parabola totalmente collocata sul semipiano positivo che, stavolta, non verificami la condizione posta. La disequazione assegnata è pertanto impossibile.

Esercizio no.12:soluzione

$\sqrt{x^3 - x} + 4 < 0 \ \rightarrow \ \sqrt{x^3 - x} < -4$ è nella forma $\sqrt[p]{A(x)} < B(x)$ per cui: $\begin{cases} A(x) \geq 0 \\ B(x) > 0 \\ A(x) < B^p(x) \end{cases}$

ma la seconda disequazione del sistema non è mai verificata; la disequazione di partenza è dunque impossibile. Come al solito si poteva notare che la condizione di esistenza del radicale:
$x^3 - x \geq 0 \ \rightarrow \ \sqrt{x^3 - x} \geq 0$ non verificava la disequazione di partenza: disequazione impossibile.

Esercizio no.13:soluzione

$\sqrt{2 - 3x} + 3 > 0 \ \rightarrow \ \sqrt{2 - 3x} > -3$

viene verificata la condizione di esistenza $2 - 3x \geq 0$ la disequazione è sicuramente soddisfatta, visto che risulterà $\sqrt{2 - 3x} \geq 0$. La soluzione è, pertanto, $x \leq \frac{2}{3}$.

Esercizio no.14:soluzione

$\sqrt{2 - x} < 1$ è nella forma $\sqrt[p]{A(x)} < B(x)$ per cui: $\begin{cases} A(x) \geq 0 \\ B(x) > 0 \\ A(x) < B^p(x) \end{cases}$

con la condizione $B(x) > 0$ che è sempre verificata. Resta da verificare il sistema:

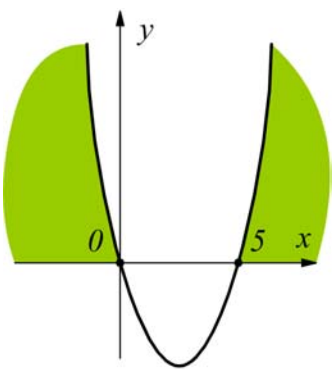
$\begin{cases} 2 - x \geq 0 \\ 2 - x < 1 \end{cases} \quad \begin{cases} x \leq 2 \\ x > 1 \end{cases}$ la soluzione è dunque $1 < x \leq 2$

Esercizio no.15:soluzione

$\sqrt[3]{2 - x} < 1$ in questo caso dobbiamo solo elevare al cubo entrambi i membri:
$2 - x < 1^3 \ \rightarrow \ 2 - x < 1 \ \rightarrow \ x > 1$

Esercizio no.16:soluzione

$\sqrt{x^2 - 5x} + 1 > \frac{1}{2} \ \rightarrow \ \sqrt{x^2 - 5x} > \frac{1}{2} - 1 \ \rightarrow \ \sqrt{x^2 - 5x} > -\frac{1}{2}$

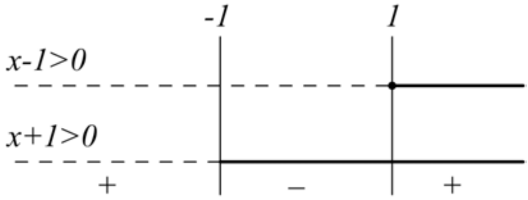


è sufficiente verificare la condizione di esistenza del radicale affinché la disequazione assegnata sia automaticamente verificata.

$x^2 - 5x \geq 0$ si tratta di una parabola con concavità rivolta verso l'alto avente radici $x_1 = 0$ ed $x_2 = 5$. Come si vede dall'immagine deve essere $x \leq 0 \ \vee \ x \geq 5$

Esercizio no.17:soluzione

$\sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}} > 2$ in primo luogo, controlliamo la condizione di esistenza del radicale:



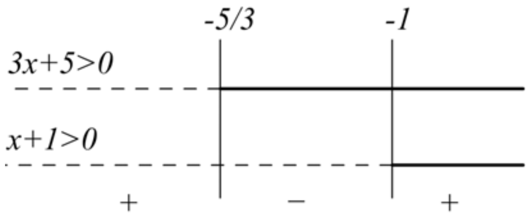
$$\frac{x-1}{x+1} \geq 0$$

Come si vede dall'immagine la condizione è verificata per $x < -1 \lor x \geq 1$

poi resta da controllare quando:

$$\frac{x-1}{x+1} > 2^2 \rightarrow \frac{x-1}{x+1} > 4 \rightarrow \frac{x-1-4x-4}{x+1} > 0 \rightarrow \frac{-3x-5}{x+1} > 0$$

se moltiplico i due membri per -1 si ottiene: $\dfrac{3x+5}{x+1} < 0$



L'intervallo che ci interessa è

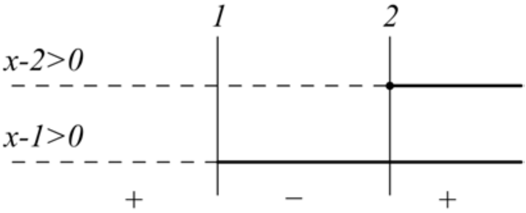
$$-\frac{5}{3} < x < -1$$

La soluzione del sistema è illustrata in figura:

ragione per cui: $-\dfrac{5}{3} < x < -1$.

Esercizio no.18:soluzione

$\sqrt{\dfrac{x-2}{x-1}} > 2$ anche in questo caso dobbiamo prima verificare la condizione di esistenza del radicale:

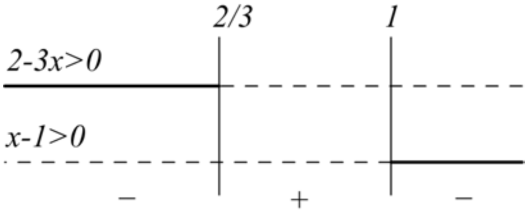


Come si vede dall'immagine

$$\frac{x-2}{x-1} \geq 0 \quad \text{per} \quad x < 1 \;\vee\; x \geq 2$$

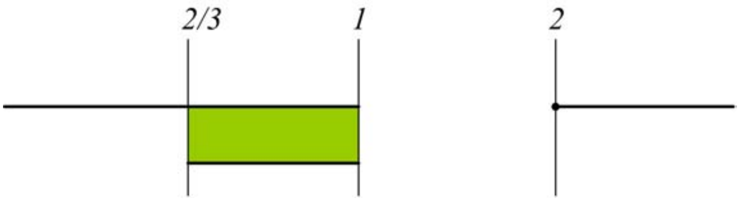
verifichiamo la successiva condizione:

$$\frac{x-2}{x-1} > 4 \;\rightarrow\; \frac{x-2-4x+4}{x-1} > 0 \;\rightarrow\; \frac{2-3x}{x-1} > 0$$



La disequazione è vera per

$$\frac{2}{3} < x < 1$$



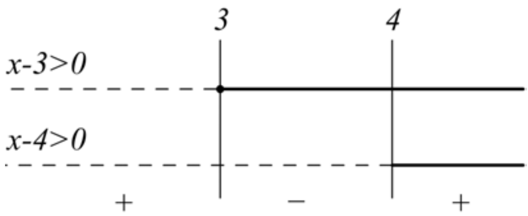
Componendo i due risultati si trova

$$\frac{2}{3} < x < 1$$

Esercizio no.19:soluzione

$\sqrt{\dfrac{x-3}{x-4}}<1$ disequazione del tipo $\sqrt[p]{A(x)}<B(x)$ per cui: $\begin{cases} A(x)\geq 0 \\ B(x)>0 \\ A(x)<B^p(x) \end{cases}$

che si riduce a $\begin{cases} A(x)\geq 0 \\ A(x)<B^p(x) \end{cases}$ la $\dfrac{x-3}{x-4}\geq 0$ viene verificata

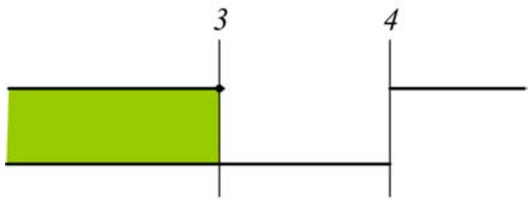


Nell'intervallo

$x\leq 3 \;\vee\; x>4$

poi $\dfrac{x-3}{x-4}<1 \;\rightarrow\; \dfrac{x-3-x+4}{x-4}<0 \;\rightarrow\; \dfrac{1}{x-4}<0$ per essere vera deve essere:

$x-4<0 \;\rightarrow\; x<4$ componendo il sistema:



Si deduce come esso sia verificato per

$x\leq 3$

Esercizio no.20:soluzione

$\dfrac{1}{\sqrt{x-2}}>-\dfrac{1}{2}$ anche in questo caso la condizione di esistenza del radicale sarà sufficiente a verificare l'intera disequazione.

Deve dunque essere $x>2$ per far si che $\sqrt{x-2}>0>-\dfrac{1}{2}$ trattandosi di un denominatore dobbiamo escludere l'eventualità $x=2$ che renderebbe privo di senso il primo membro.

Esercizio no.21:soluzione

$\sqrt{3x+5}<0$

La disequazione è impossibile perché se il radicale è un numero reale è nullo oppure positivo e non può mai essere negativo.

Esercizio no.22:soluzione

$$\sqrt[3]{x+3} > -1$$

L'indice della radice è dispari e quindi elevando entrambi i membri al cubo , si ha la disequazione equivalente:

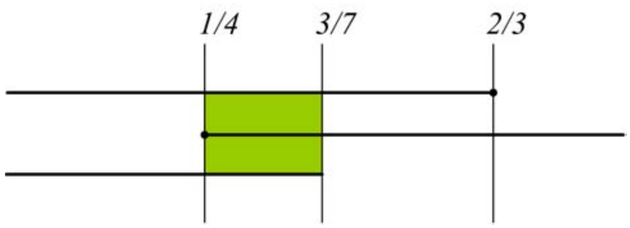
$$x+3 > -1 \quad \to \quad x > -4$$

Esercizio no.23:soluzione

$$\sqrt{2-3x} > \sqrt{4x-1}$$

Se sono soddisfatte le condizioni di esistenza dei due radicali, il primo e il secondo membro della disequazione sono positivi o nulli e quindi potremmo elevare al quadrato entrambi i membri.
Si deve pertanto risolvere il seguente sistema:

$$\begin{cases} 2-3x \geq 0 \\ 4x-1 \geq 0 \\ 2-3x > 4x-1 \end{cases} \qquad \begin{cases} x \leq 2/3 \\ x \geq 1/4 \\ 3 > 7x \end{cases} \qquad \begin{cases} x \leq 2/3 \\ x \geq 1/4 \\ x < 3/7 \end{cases}$$



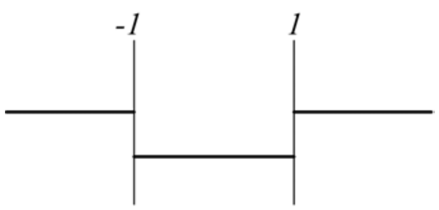
$$\frac{1}{4} \leq x < \frac{3}{7}$$

Esercizio no.24:soluzione

$\sqrt{\dfrac{1+x^2}{x^2-1}} < 1$ disequazione del tipo $\sqrt[p]{A(x)} < B(x)$ con B(x)>0 per cui: $\begin{cases} A(x) \geq 0 \\ A(x) < B^p(x) \end{cases}$

il rapporto radicando $\dfrac{1+x^2}{x^2-1} \geq 0$ quando $x^2-1>0$ (si deduce che tale rapporto non potrà mai essere uguale a 0)

$$\begin{cases} x^2-1>0 \\ \dfrac{1+x^2}{x^2-1} < 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} x<-1 \ \vee \ x>1 \\ \dfrac{1+x^2-x^2+1}{x^2-1} < 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x<-1 \ \vee \ x>1 \\ \dfrac{2}{x^2-1} < 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x<-1 \ \vee \ x>1 \\ -1<x<1 \end{cases}$$



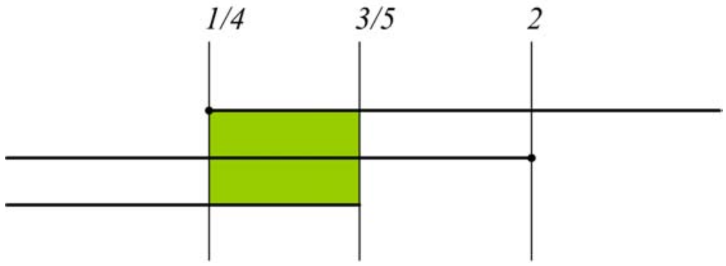
Non vi è intersezione fra i due insiemi trovati,
la disequazione è impossibile

Esercizio no.25:soluzione

$$\sqrt{4x-1} < \sqrt{2-x}$$

Verifichiamo le condizioni di esistenza dei radicali unitamente al risultato della disequazione:

$$\begin{cases} 4x-1 \geq 0 \\ 2-x \geq 0 \\ 4x-1 < 2-x \end{cases} \quad \begin{cases} x \geq 1/4 \\ x \leq 2 \\ 5x < 3 \end{cases} \quad \begin{cases} x \geq 1/4 \\ x \leq 2 \\ x < 3/5 \end{cases}$$



La soluzione della disequazione è

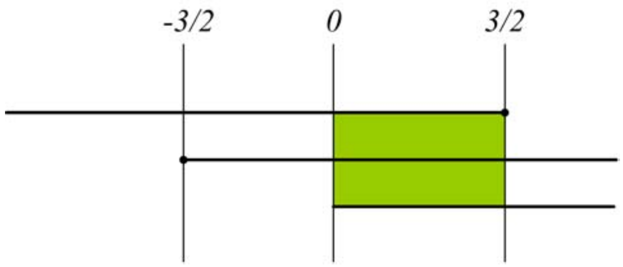
$$\frac{1}{4} \leq x < \frac{3}{5}$$

Esercizio no.26:soluzione

$$\sqrt{3-2x} < \sqrt{3+2x}$$

Verifichiamo le condizioni di esistenza dei radicali unitamente al risultato della disequazione:

$$\begin{cases} 3-2x \geq 0 \\ 3+2x \geq 0 \\ 3-2x < 3+2x \end{cases} \quad \begin{cases} 2x \leq 3 \\ 2x \geq -3 \\ 4x > 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x \leq 3/2 \\ x \geq -3/2 \\ x > 0 \end{cases}$$



La soluzione della disequazione è

$$0 < x \leq \frac{3}{2}$$

Esercizio no.27:soluzione

$\sqrt[3]{1+x} < \sqrt{1-x}$

Dobbiamo solo verificare l'esistenza del radicale al II°membro
poi essendo 6 l'mcm fra 3 e 2 elevo alla sesta potenza entrambi i membri

$\begin{cases} 1-x \geq 0 \\ (1+x)^{\frac{6}{3}} < (1-x)^{\frac{6}{2}} \end{cases}$ $\quad \begin{cases} x \leq 0 \\ (1+x)^2 < (1-x)^3 \end{cases}$ avremo:

$\begin{cases} x \leq 0 \\ 1+2x+x^2 < 1-3x+3x^2-x^3 \end{cases}$ l'ultima di queste diventa:

$$x^3-2x^2+5x<0 \quad \rightarrow \quad x(x^2-2x+5)<0$$

analizzando questa disequazione, il trinomio di II° non prevede le radici perchè:
$\Delta = b^2-4ac = 4-20 < 0$ ed è una parabola con concavità verso l'alto, totalmente contenuta nel semipiano cartesiano superiore.

quindi l'ultima disequazione è verificata per x<0. Per il sistema impostato;

La soluzione è $x < 0$.

Esercizio no.28:soluzione

$$\sqrt{x^2-4} > x+1$$

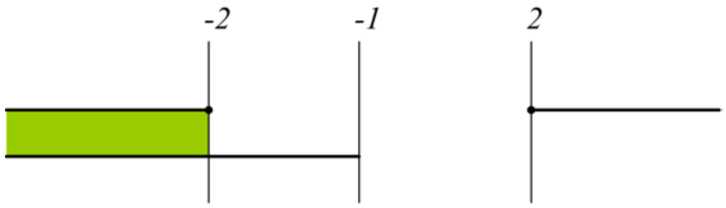
essendo una disequazione del tipo $\sqrt{A(x)} > B(x)$ la soluzione sarà l'unione delle soluzioni dei due sistemi:

$$\begin{cases} A(x) \geq 0 \\ B(x) < 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} B(x) \geq 0 \\ A(x) > B^2(x) \end{cases}$$

per cui il primo sistema è

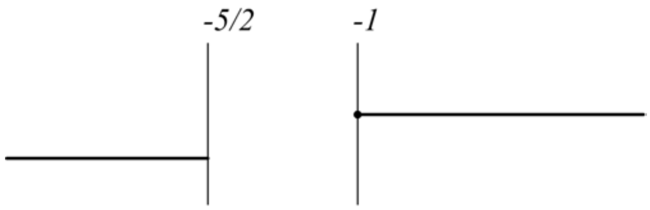
$$\begin{cases} x^2-4 \geq 0 \\ x+1 < 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x \leq -2 \;\vee\; x \geq 2 \\ x < -1 \end{cases}$$

il primo sistema è verificato per $x \leq -2$



Il secondo sistema:

$$\begin{cases} x+1 \geq 0 \\ x^2-4 > (x+1)^2 \end{cases} \quad \begin{cases} x \geq -1 \\ \cancel{x}^2-4 > \cancel{x}^2+2x+1 \end{cases} \quad \begin{cases} x \geq -1 \\ -5 > 2x \end{cases} \quad \begin{cases} x \geq -1 \\ x < -5/2 \end{cases}$$



Quindi il secondo sistema non è mai verificato; l'unione delle due soluzioni vale:

$x \leq 2$

Esercizio no.29:soluzione

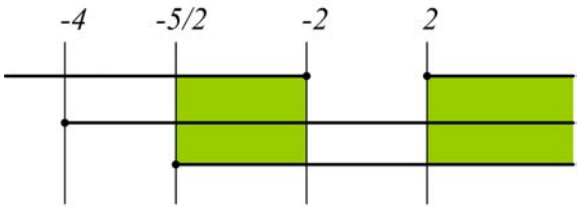
$$x+4 \geq \sqrt{x^2-4}$$

essendo una disequazione del tipo $\sqrt{A(x)} \leq B(x)$ deve essere verificato il sistema:

$$\begin{cases} A(x) \geq 0 \\ B(x) \geq 0 \\ A(x) \leq B^2(x) \end{cases} \quad \begin{cases} x^2-4 \geq 0 \\ x+4 \geq 0 \\ x^2-4 \leq (x+4)^2 \end{cases} \quad \begin{cases} x \leq -2 \ \vee \ x \geq 2 \\ x \geq -4 \\ \cancel{x^2}-4 \leq \cancel{x^2}+8x+16 \end{cases} \quad \begin{cases} x \leq -2 \ \vee \ x \geq 2 \\ x \geq -4 \\ 0 \leq 8x+20 \end{cases}$$

in definitiva

$$\begin{cases} x \leq -2 \ \vee \ x \geq 2 \\ x \geq -4 \\ x \geq -\dfrac{20}{8} \end{cases} \quad \begin{cases} x \leq -2 \ \vee \ x \geq 2 \\ x \geq -4 \\ x \geq -\dfrac{5}{2} \end{cases}$$



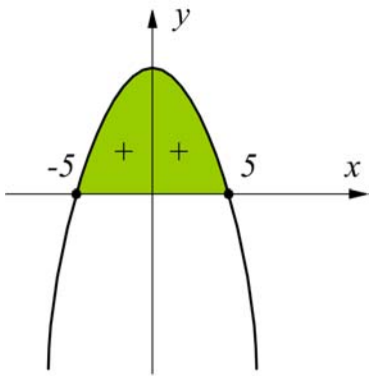
E' verificata per: $-\dfrac{5}{2} \leq x \leq -2 \quad \vee \quad x \geq 2$

Esercizio no.30:soluzione

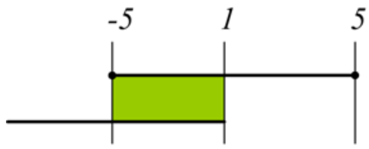
$x-1<\sqrt{25-x^2}$ essendo una disequazione del tipo $\sqrt{A(x)}>B(x)$ la soluzione sarà l'unione delle soluzioni dei due sistemi:

$\begin{cases} A(x)\geq 0 \\ B(x)<0 \end{cases}$ $\begin{cases} B(x)\geq 0 \\ A(x)>B^2(x) \end{cases}$ per cui il primo sistema è

$\begin{cases} 25-x^2\geq 0 \\ x-1<0 \end{cases}$ $\begin{cases} -5\leq x\leq 5 \\ x<1 \end{cases}$



La prima disequazione del sistema è una funzione rappresentata da una parabola con concavità rivolta verso il basso con soluzioni $x=\pm 5$.



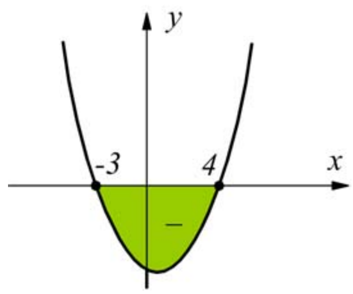
il sistema ha soluzione $-5\leq x<1$.

il secondo sistema è

$\begin{cases} x-1\geq 0 \\ 25-x^2>(x-1)^2 \end{cases}$ $\begin{cases} x\geq 1 \\ 25-x^2>x^2-2x+1 \end{cases}$ $\begin{cases} x\geq 1 \\ 2x^2-2x-24<0 \end{cases}$

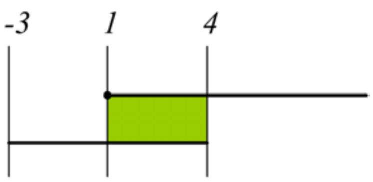
L'ultima disequazione può essere rappresentata come $x^2-x-12<0$
è una parabola con concavità rivolta verso l'alto che prevede le radici:

$$x_{1/2}=\frac{1\pm\sqrt{1+48}}{2}=\begin{cases} \dfrac{1+7}{2}=\dfrac{8}{2}=4 \\ \dfrac{1-7}{2}=-\dfrac{6}{2}=-3 \end{cases}$$



Verificata per $-3<x<4$

$\begin{cases} x\geq 1 \\ -3<x<4 \end{cases}$



Il secondo sistema è verificato per $1\leq x<4$

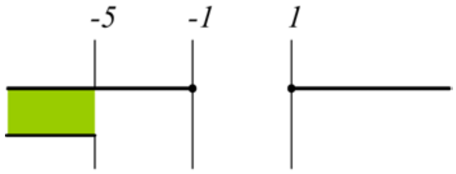
Unendo le soluzioni dei due sistemi avremo: $-5\leq x<4$.

Esercizio no.31:soluzione

$x+5<\sqrt{x^2-1}$ quindi $\sqrt{x^2-1}>x+5$ del tipo del tipo $\sqrt{A(x)}>B(x)$ la soluzione sarà l'unione delle soluzioni dei due sistemi:

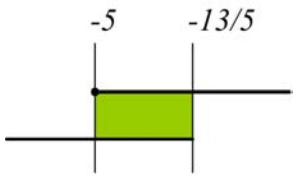
$\begin{cases} A(x)\ge 0 \\ B(x)<0 \end{cases}$ $\begin{cases} B(x)\ge 0 \\ A(x)>B^2(x) \end{cases}$ il primo sistema è

$\begin{cases} x^2-1\ge 0 \\ x+5<0 \end{cases}$ $\begin{cases} x\le -1 \ \vee \ x\ge 1 \\ x<-5 \end{cases}$



soddisfatta per $x<-5$ mentre il secondo sistema:

$\begin{cases} x+5\ge 0 \\ x^2-1>(x+5)^2 \end{cases}$ $\begin{cases} x\ge -5 \\ x^2-1>x^2+10x+25 \end{cases}$ $\begin{cases} x\ge -5 \\ 10x+26<0 \end{cases}$ $\begin{cases} x\ge -5 \\ 5x+13<0 \end{cases}$ $\begin{cases} x\ge -5 \\ x<-13/5 \end{cases}$



In questo ultimo sistema la soluzione è $-5\le x<-\frac{13}{5}$

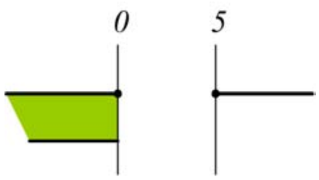
Se uniamo questa soluzione a quella del sistema precedente $x<-\frac{13}{5}$

Esercizio no.32:soluzione

$\sqrt{x^2-5x}>2x$ del tipo del tipo $\sqrt{A(x)}>B(x)$ la soluzione sarà l'unione delle soluzioni dei due sistemi:

$\begin{cases} A(x)\ge 0 \\ B(x)<0 \end{cases}$ $\begin{cases} B(x)\ge 0 \\ A(x)>B^2(x) \end{cases}$ il primo sistema è

$\begin{cases} x^2-5x\ge 0 \\ 2x<0 \end{cases}$ $\begin{cases} x\le 0 \ \vee \ x\ge 5 \\ x<0 \end{cases}$

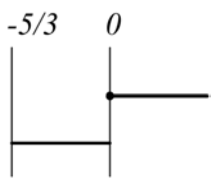


Soddisfatta per

$x<0$

il secondo sistema è

$\begin{cases} 2x\ge 0 \\ x^2-5x>4x^2 \end{cases}$ $\begin{cases} x\ge 0 \\ 3x^2+5x<0 \end{cases}$ $\begin{cases} x\ge 0 \\ -5/3<x<0 \end{cases}$



mai verificata;

l'unione delle due soluzioni è $x<0$.

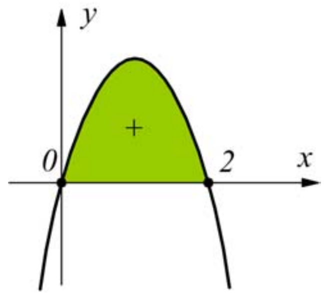
Esercizio no.33:soluzione

$\sqrt{2x-x^2} > x$

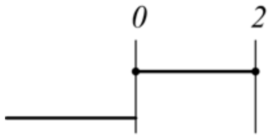
del tipo del tipo $\sqrt{A(x)} > B(x)$ la soluzione sarà l'unione delle soluzioni dei due sistemi:

$\begin{cases} A(x) \geq 0 \\ B(x) < 0 \end{cases}$ $\quad \begin{cases} B(x) \geq 0 \\ A(x) > B^2(x) \end{cases}$ il primo sistema è

$\begin{cases} 2x-x^2 \geq 0 \\ x < 0 \end{cases}$

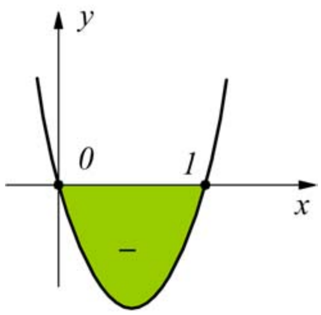


La prima disequazione è una parabola con concavità rivolta verso il basso come si vede il sistema non è mai verificato.



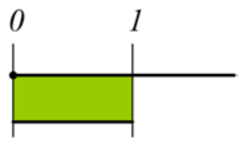
il secondo sistema è:

$\begin{cases} x \geq 0 \\ 2x-x^2 > x^2 \end{cases}$ $\quad \begin{cases} x \geq 0 \\ 2x^2-2x < 0 \end{cases}$ $\quad \begin{cases} x \geq 0 \\ x^2-x < 0 \end{cases}$



La seconda disequazione è una parabola con concavità rivolta verso l'alto, soddisfatta nell'intervallo $0 < x < 1$

Il sistema risulta soddisfatto in tale intervallo come illustrato nella figura a destra.



Unendo i due risultati si ha $0 < x < 1$.

Esercizio no.34:soluzione

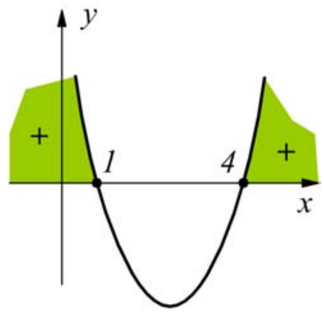
$$\sqrt{(x-2)^2-x}-x+3<0 \quad \rightarrow \quad \sqrt{(x-2)^2-x}<x-3$$

Disequazione del tipo $\sqrt{A(x)}<B(x)$ va soddisfatto il sistema:

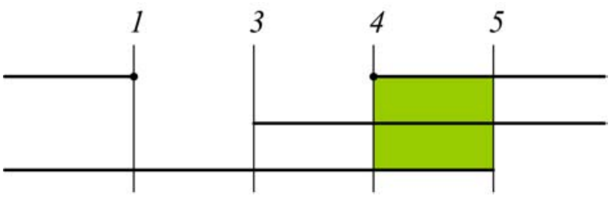
$$\begin{cases} A(x)\geq 0 \\ B(x)>0 \\ A(x)<B^2(x) \end{cases} \quad \begin{cases} (x-2)^2-x\geq 0 \\ x-3>0 \\ (x-2)^2-x<(x-3)^2 \end{cases} \quad \begin{cases} x^2-4x+4-x\geq 0 \\ x>3 \\ \cancel{x^2}-4x+4-x<\cancel{x^2}-6x+9 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2-5x+4\geq 0 \\ x>3 \\ x-5<0 \end{cases} \quad \begin{cases} x^2-5x+4\geq 0 \\ x>3 \\ x<5 \end{cases}$$

$$x_{1/2}=\frac{5\pm\sqrt{25-16}}{2}=\begin{cases} \dfrac{5+3}{2}=4 \\ \dfrac{5-3}{2}=1 \end{cases}$$



La prima disequazione è soddisfatta per $x\leq 1 \quad \vee \quad x\geq 4$



Il sistema è soddisfatto per

$4\leq x<5$

Esercizio no.35:soluzione

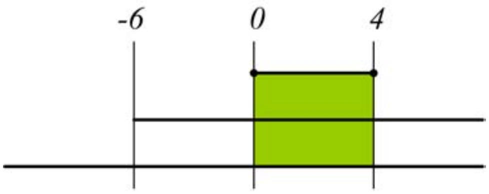
$x+6>\sqrt{4x-x^2} \quad \rightarrow \quad \sqrt{4x-x^2}<x+6$

Disequazione del tipo $\sqrt{A(x)}<B(x)$ va soddisfatto il sistema:

$$\begin{cases} A(x)\geq 0 \\ B(x)>0 \\ A(x)<B^2(x) \end{cases} \quad \begin{cases} 4x-x^2\geq 0 \\ x+6>0 \\ 4x-x^2<(x+6)^2 \end{cases} \quad \begin{cases} 4x-x^2\geq 0 \\ x>-6 \\ 4x-x^2<x^2+12x+36 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4x-x^2\geq 0 \\ x>-6 \\ 2x^2+8x+36>0 \end{cases} \quad \begin{cases} 4x-x^2\geq 0 \\ x>-6 \\ x^2+4x+18>0 \end{cases} \quad \begin{cases} 4\leq x\leq 0 \\ x>-6 \\ \forall x \end{cases}$$

La prima è infatti una parabola con concavità rivolta verso il basso con intersezioni sull'asse delle ascisse $x=0$ ed $x=4$ è, pertanto, soddisfatta nei valori interni a tale intervallo.
L'ultima è una parabola con concavità rivolta verso l'alto ma il suo $\Delta<0$: non ha intersezioni con l'asse x ed è totalmente collocata nel semipiano positivo.



Il sistema è soddisfatto per

$0\leq x\leq 4$

Esercizio no.36:soluzione

$$\sqrt{2x^2 - x - 1} < x - 1$$

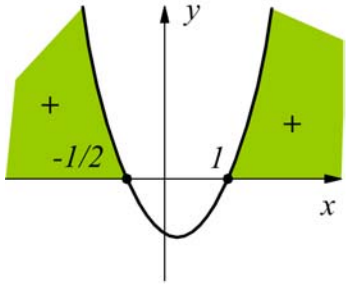
Disequazione del tipo $\sqrt{A(x)} < B(x)$ va soddisfatto il sistema:

$$\begin{cases} A(x) \geq 0 \\ B(x) > 0 \\ A(x) < B^2(x) \end{cases} \quad \begin{cases} 2x^2 - x - 1 \geq 0 \\ x - 1 > 0 \\ 2x^2 - x - 1 < (x-1)^2 \end{cases} \quad \begin{cases} x \leq -1/2 \ \vee \ x \geq 1 \\ x > 1 \\ 2x^2 - x - 1 < x^2 - 2x + 1 \end{cases}$$

La prima è, infatti una parabola con concavità rivolta verso l'alto, soddisfatta nell'intervallo:

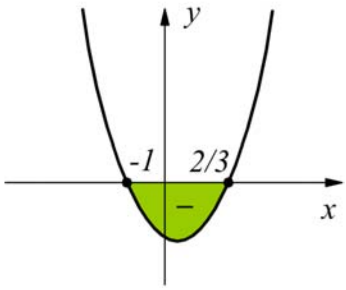
$$x \leq -\frac{1}{2} \ \vee \ x \geq 1$$

$$x_{1/2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{4} = \begin{cases} \dfrac{1+3}{4} = 1 \\ \dfrac{1-3}{4} = -\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

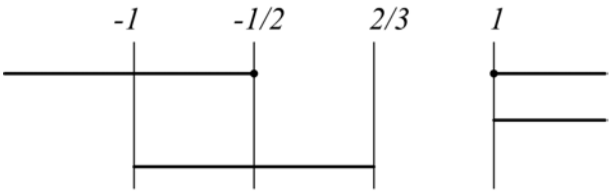


L'ultima diventa: $3x^2 + x - 2 < 0$

$$x_{1/2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+24}}{6} = \begin{cases} \dfrac{-1+5}{6} = \dfrac{4}{6} = \dfrac{2}{3} \\ \dfrac{-1-5}{6} = -1 \end{cases}$$



soddisfatta per $-1 < x < \dfrac{2}{3}$ in definitiva avremo:



Il sistema non è mai verificato, la soluzione è impossibile:

$$R\,(impossibile)$$

Esercizio no.37:soluzione

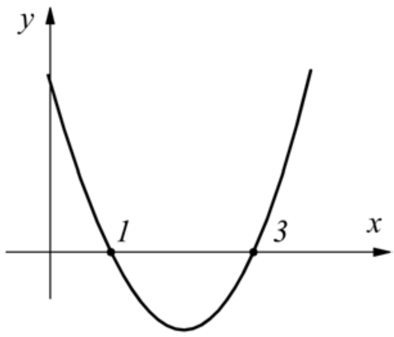
$$\sqrt{x^2-4x+3}<5-x$$

dalla $\sqrt{A(x)}<B(x) \quad \rightarrow \begin{cases} A(x)\geq 0 \\ B(x)>0 \\ A(x)<B(x)^2 \end{cases}$

$$\begin{cases} x^2-4x+3\geq 0 \\ 5-x>0 \\ x^2-4x+3<(5-x)^2 \end{cases}$$

per la prima le radici sono

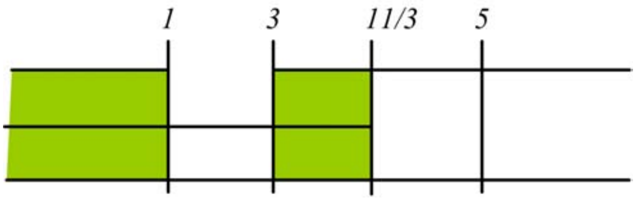
$$x_{1/2}=\frac{4\pm\sqrt{16-12}}{2}=\begin{cases} \frac{4+2}{2}=3 \\ \frac{4-2}{2}=1 \end{cases}$$



Si vede come deve essere $x<1 \ \vee \ \ x>3$

per la seconda basta scrivere $x<5$

la terza comporta: $\cancel{x^2}-4x+3<25-10x+\cancel{x^2} \quad \rightarrow \quad 6x<22 \rightarrow \quad x<\frac{22}{6} \quad \rightarrow \quad x<\frac{11}{3}$



Componendo queste tre condizioni, il sistema risultante risulta soddisfatto per

$$x<1 \ \vee \ \ 3<x<\frac{11}{3}$$

Esercizio no.38:soluzione

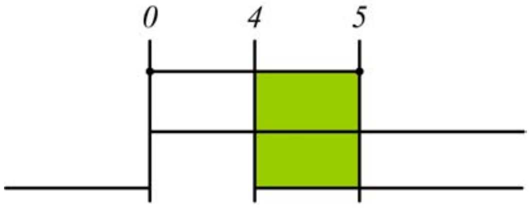
$$\sqrt{5+x} > \sqrt{x} + \sqrt{5-x}$$

per elevare al quadrato i due membri della disequazione occorre verificare le condizioni di esistenza dei radicali

$$\begin{cases} 5+x \geq 0 \\ x \geq 0 \\ 5-x \geq 0 \\ 5+x > x + 2\sqrt{x(5-x)} + 5 - x \end{cases} \qquad \begin{cases} x \geq -5 \\ x \geq 0 \\ x \leq 5 \\ \cancel{5}+x > \cancel{x} + 2\sqrt{x(5-x)} + \cancel{5} - \cancel{x} \end{cases}$$

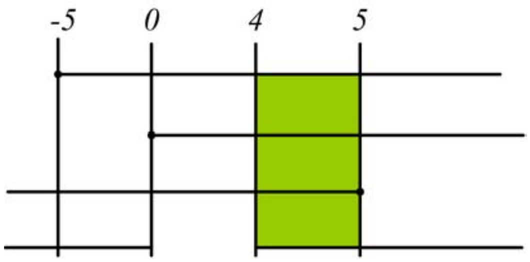
questa ultima disequazione è del tipo consueto ed equivale al sistema:

$$\begin{cases} x(5-x) \geq 0 \\ x > 0 \\ x^2 > 4x(5-x) \end{cases} \qquad \begin{cases} 0 \leq x \leq 5 \\ x > 0 \\ 5x^2 - 20x > 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 0 \leq x \leq 5 \\ x > 0 \\ x < 0 \quad \vee \quad x > 4 \end{cases}$$



quindi riscriviamo il primo sistema come:

$$\begin{cases} x \geq -5 \\ x \geq 0 \\ x \leq 5 \\ x < 0 \quad \vee \quad x > 4 \end{cases}$$



Quest ultimo è risolto per

$$4 < x \leq 5$$

Esercizio no.39:soluzione

$\sqrt{3x+1} > 9 - \sqrt{3x+10}$

$$\begin{cases} 3x+1 \geq 0 \\ 3x+10 \geq 0 \\ 3x+1 > 81 - 18\sqrt{3x+10} - 3x - 10 \end{cases} \qquad \begin{cases} x \geq -1/3 \\ x \geq -10/3 \\ \cancel{3x} + 1 > 81 - 18\sqrt{3x+10} + \cancel{3x} + 10 \end{cases}$$

L'ultima disequazione viene ricondotta a $90 < 18\sqrt{3x+10}$ $\rightarrow$ $5 < \sqrt{3x+10}$
viene risolta dal sistema:

$$\begin{cases} 3x+10 \geq 0 \\ 3x+10 > 25 \end{cases} \quad \begin{cases} x \geq -10/3 \\ x > 15/3 \end{cases} \quad \rightarrow \quad x > 5$$

tornando al sistema iniziale

$$\begin{cases} x \geq -1/3 \\ x \geq -10/3 \\ x > 5 \end{cases}$$ la disequazione iniziale è verificata per $x > 5$

Esercizio no.40:soluzione

$\sqrt[3]{x^3 - 1} < \sqrt{x^2 + 1}$

sia il primo che il secondo membro rappresentano dei numeri reali (la condizione di esistenza della radice quadra è sempre verificata).

Se $x^3 - 1 \leq 0$ $\rightarrow$ $x \leq 1$ la disequazione è sempre vera perché $\sqrt{x^2+1} > 0$

Se $x^3 - 1 > 0$ $\rightarrow$ $x > 1$ bisogna simultaneamente verificare che:

$(x^3 - 1)^{\frac{1}{3}} < (x^2 + 1)^{\frac{1}{2}}$ elevo alla sesta potenza entrambi i membri

$(x^3 - 1)^2 < (x^2+1)^3 \rightarrow \cancel{x^6} - 2x^3 + \cancel{1} < \cancel{x^6} + 3x^4 + 3x^2 + \cancel{1}$ cioè

$3x^4 + 2x^3 + 3x^2 > 0 \rightarrow x^2(3x^2 + 2x + 3) > 0$

Per l'espressione di II° $3x^2 + 2x + 3$ si ha $\Delta = b^2 - 4ac = 4 - 36 < 0$ quindi

la disequazione è sempre verificata, se $x \neq 0$. Quindi questo secondo sistema ci porta a scrivere:

$$\begin{cases} x > 1 \\ \sqrt[3]{x^3-1} < \sqrt{x^2+1} \end{cases} \qquad \begin{cases} x > 1 \\ x \neq 0 \end{cases}$$ che è sempre verificata..

in definitiva la soluzione è $\forall x \in \Re$.